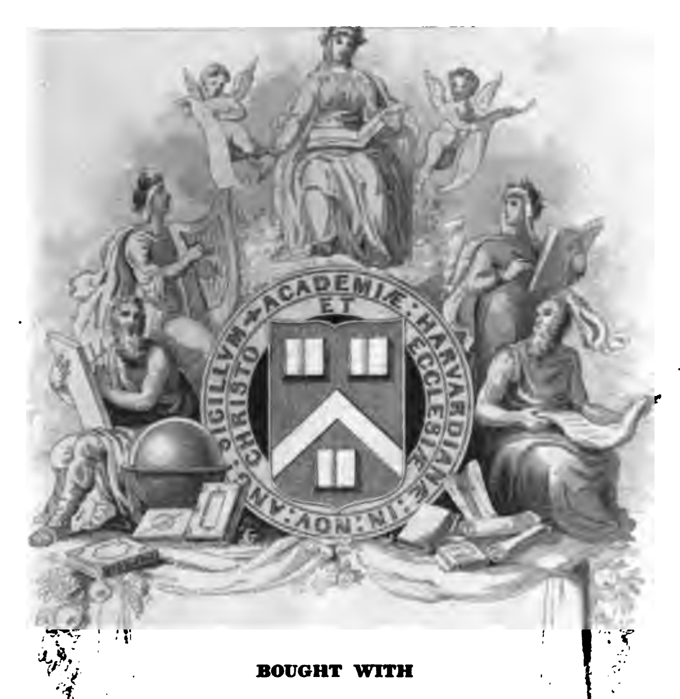
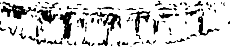

SIGILLVM ACADEMIÆ HARVARDIANÆ IN NOV. ANG.
CHRISTO ET ECCLESIÆ


Rec'd 14 Oct, 1871.

VON DER METHODE

DER

KLEINSTEN QUADRATE IM ALLGEMEINEN

UND

IN IHRER ANWENDUNG AUF DIE GEODÄSIE.

VON

Peter Andreas
P. A. HANSEN,
MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESSELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTN.

Des VIII. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

No V.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1867.

Der Hauptzweck dieser Abhandlung ist die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf die Geodäsie, oder die Ausgleichung der Winkel eines Dreiecksnetzes, auf die Art darzulegen, die mir die geeignetste zu sein scheint. Zwar hat Gauss schon einen speciellen Fall dieser Anwendung in einer Abhandlung, die in Bezug auf die Sache selbst die erste war, niedergelegt*), während Bessel fast gleichzeitig seine Auflösung derselben Aufgabe veröffentlichen liess**). Später hat Bessel seine Auflösung der allgemeineren Aufgabe veröffentlicht***), und ich habe fast gleichzeitig eine wesentlich davon verschiedene Auflösung einer noch allgemeineren Aufgabe, aber kurz gefasst, und gleichsam nur im Scelet gegeben †).

Es ist namentlich diese letztgenannte Auflösung, die ich vollständig ausgearbeitet in der gegenwärtigen Abhandlung niedergelegt habe, und die sich von der Bessel'schen vielfach, unter andern dadurch unterscheidet, dass ich die unbestimmten Auflösungen von Systemen von linearischen Gleichungen, die Bessel verlangt, vollständig vermieden habe; ich bin anzunehmen geneigt, dass durch mein Verfahren eine grössere Kürze der auszuführenden Rechnungen erlangt wird. Auch habe ich nicht nur die Vorschriften zur Berechnung der Gewichte beliebiger Functionen der

*) Gauss, Supplementum theoriae combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae. Gottingae 1828.

**) Schum. A. N. B. VI. No. 121.

***) Bessel und Baeyer, Gradmessung in Ostpreussen und ihre Verbindung mit Preussischen und Russischen Dreiecksketten. Berlin 1838.

†) Schum. A. N. B. XVI. No. 361.

Unbekannten, die bei Bessel fehlen, vollständig entwickelt, sondern auch gezeigt, wie verfahren werden muss, wenn mehr wie Eine Grundlinie gemessen worden ist, oder wenn man das auszugleichende Dreiecksnetz an ein anderes, nebenliegendes, schon ausgeglichenes anschliessen will.

Bei der Ausgleichung eines grossen, aus vielen Dreiecken bestehenden Netzes ist es von Wichtigkeit, die anzuwendenden allgemeinen Formeln in solcher Darstellung und Aufeinanderfolge vor sich zu haben, dass man nie die vollständige Uebersicht verlieren kann, denn wenn dieser Umstand eintreten sollte, so ist er nur durch Verlust an Zeit und Arbeit zu heben. Aus diesem Grunde habe ich mich schon im Laufe der Ableitungen und während der Ausführung eines Beispiels bemüht, die Erklärungen möglichst vollständig zu geben, und schliesslich habe ich aus demselben Grunde noch eine Recapitulation aller Vorschriften und Formeln gegeben, die wohl ausserdem überflüssig gewesen wäre, von welcher mir aber schien, dass sie die Uebersichtlichkeit fördern möchte.

Wenn gleich die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf die Geodäsie den Hauptgrund zur Abfassung dieser Abhandlung bildete, so wollte ich doch nicht unterlassen diese Methode auch in ihrer Allgemeinheit, und in der ganzen Ausdehnung, die sie gegenwärtig besitzt, zu entwickeln, und dabei einen Weg zu verfolgen, den ich schon seit vielen Jahren überlegt habe. Gewöhnlich geht man bei der Ableitung dieser Methode im Allgemeinen von den allgemeinen Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung aus, aber es zeigt sich immer im Laufe der Entwickelungen, dass man damit nicht vollständig ausreicht, sondern immer in grösserem oder geringerem Maasse den Satz zu Hülfe nehmen muss, dass bei der Bestimmung Einer Unbekannten aus einer Anzahl von gleich guten Beobachtungen das arithmetische Mittel aus diesen der wahrscheinlichste Werth der Unbekannten sei. Da dieses sich so verhält, so nahm ich mir vor diesen Satz als Axiom an die Spitze der Ableitungen zu stellen, und aus demselben das Verfahren abzuleiten, welches zu befolgen ist, wenn die Werthe mehrerer Unbekannten aus Beobachtungen von ungleicher Genauigkeit zu bestimmen sind, und die Zahl dieser Beobachtungen grösser ist wie die der Unbekannten. Ich wurde, wie sich voraussehen liess, auf diese Weise auf die Methode der kleinsten Quadrate hingeführt. Der Satz, welcher hiedurch bewiesen worden ist, lässt sich streng genommen wie folgt aussprechen:

»Mit demselben Recht, mit welchem man im ersteren, einfachsten Falle das arithmetische Mittel aus den Beobachtungen als den wahrscheinlichsten Werth der einzigen Unbekannten ansieht, muss man im anderen, allgemeinen Falle diejenigen Werthe der Unbekannten als die wahrscheinlichsten Werthe derselben betrachten, durch welche bewirkt wird, dass die Summe der mit ihren bez. Gewichten multiplicirten Quadrate der übrig bleibenden Fehler ein Minimum wird.«

Ich glaube, dass in Bezug auf die Methode der kleinsten Quadrate dieser Satz an der Grenze der streng beweisbaren Sätze liegt.

Während bei der Ableitung dieses Satzes sich für den Begriff des Gewichts einer Beobachtung oder eines Resultats aus Beobachtungen eine einfache und sachgemässe Erklärung darbietet, bleibt es ohne Weiteres unmöglich, die Relation zwischen den Gewichten und den relativen Genauigkeiten zweier oder mehrerer Beobachtungen festzustellen. Hiezu musste ich zwei bekannte Sätze aus den Elementen der Wahrscheinlichkeitsrechnung verwenden und mit dem obigen Axiom verbinden. Das Resultat, welches unter andern hieraus hervorging, ist das bekannte, nemlich dass die Gewichte den Quadraten der Genauigkeiten proportional sind. Es brauchten diese Untersuchungen wieder nur in der Annahme Einer Unbekannten ausgeführt zu werden, da die Folgerungen, die daraus entsprangen, ohne Weiteres auf eine beliebige Anzahl von Unbekannten ausgedehnt werden konnten. Aus diesem Grunde wurden sie vor der vollständigen Ableitung des oben angeführten Satzes dem Texte einverleibt.

Die Abhandlung behandelt der Reihe nach die folgenden Themata:

§. 1. Ermittelung des wahrscheinlichsten Werthes Einer Unbekannten aus Beobachtungen. Art. 1—17.

§. 2. Ausdehnung des Vorhergehenden auf den Fall, in welchem die Werthe mehrerer unabhängiger Unbekannten durch Beobachtungen zu bestimmen sind. Art. 18—27.

§. 3. Ausdehnung der bisher behandelten Aufgabe auf den Fall, in welchem die Unbekannten nicht von einander unabhängig sind. Art. 28—63.

§. 4. Anwendung der eben gelösten Aufgabe auf die Geodäsie, unter der Bedingung, dass nur Eine Grundlinie gemessen worden ist.

a) Erstes Verfahren. Art. 64—107.

b) Zweites Verfahren. Art. 108—118.

§. 1. Ermittelung des wahrscheinlichsten Werthes Einer Unbekannten aus Beobachtungen.

1.

Grundsatz.

»Wenn für die unmittelbare Bestimmung einer unbekannten Grösse mehrere von einander unabhängige Beobachtungen vorhanden sind, die alle unter gleichen Umständen und mit gleicher Sorgfalt angestellt worden sind, so ist der aus diesen Beobachtungen hervorgehende wahrscheinlichste Werth der Unbekannten das arithmetische Mittel aus allen diesen Beobachtungen.«

Man kann diesen Satz zwar nicht vollständig beweisen, aber es lässt sich vieles anführen, welches dafür spricht, dass er in der Natur der Sache begründet ist. Es kann strenge genommen nur bewiesen werden, dass man bei der Anwendung dieses Satzes durch die Vermehrung der Anzahl der Beobachtungen sich immer mehr und mehr dem wahren Werthe der Unbekannten nähert. Beobachtungen, die unter gleichen Umständen und mit gleicher Sorgfalt angestellt worden sind, müssen nothwendig als mit gleicher Genauigkeit begabt angesehen werden, und es muss daher gewiss das aus denselben hervorgehende wahrscheinlichste Resultat wenigstens eine symmetrische Function von allen durch die Beobachtungen erhaltenen Werthen sein. Die Summe aller dieser Werthe ist aber die einfachste symmetrische Function derselben, die man sich denken kann. Wenn nun die Unbekannte x genannt wird, und m Beobachtungen nach und nach n, n', n'', etc.

für x gegeben haben, so dass aus denselben nach und nach hervorgegangen ist,

$$x = n$$
$$x = n'$$
$$x = n'' \text{ etc.}$$

dann wird

$$mx = n + n' + n'' + \text{ etc.}$$

und hieraus

$$x = \frac{n + n' + n'' + \text{ etc.}}{m}$$

das ist, x wird gleich dem arithmetischen Mittel aus allen Beobachtungen.

Betrachten wir nun die Beschaffenheit des Fehlers, den wir begehen indem wir x durch die vorstehende Gleichung bestimmen. Seien der wahre Werth der Unbekannten w, und die wahren Fehler der Beobachtungen e, e', e'', etc., so dass

$$n = w + e, \quad n' = w + e', \quad n'' = w + e'', \quad \text{etc.}$$

wird, dann wird der Ausdruck des arithmetischen Mittels

$$x = w + \frac{e + e' + e'' + \text{ etc.}}{m}$$

Vorausgesetzt nun, dass kein Grund vorhanden ist um anzunehmen, dass gleiche positive und negative Fehler verschiedene Wahrscheinlichkeiten haben, muss die Summe $e + e' + e'' +$ etc. sich um desto mehr dem Werthe Null nähern, je mehr Beobachtungen vorhanden sind. Denn je öfterer die Beobachtungen wiederholt werden, mit desto grösserem Rechte darf man erwarten, dass alle möglichen Fälle in gleicher Anzahl vorgekommen sind, gleichwie man mit einem symmetrisch gearbeiteten homogenen Würfel um so mehr jede Zahl gleich viele Mal geworfen haben muss, je grösser die Anzahl der Würfe ist. Aber unter der obigen Voraussetzung, dass positive und negative Beobachtungsfehler gleiche Wahrscheinlichkeit haben, wird bei wachsendem m die Zahl und die Grösse der positiven Werthe von e sich der Zahl und der Grösse der negativen e unbegrenzt nähern, also schliesslich die Summe $e + e' + e'' +$ etc. Null werden, wie oben behauptet wurde. Aus mehrerem Grunde muss daher bei wachsendem m die Function

$$\frac{e + e' + e'' + \text{ etc.}}{m}.$$

unmerklich werden, und der Werth $x = w$ aus dem arithmetischen Mittel hervorgehen.

2.

Indem wir nun immer das arithmetische Mittel aus gleich guten Beobachtungen als den wahrscheinlichsten Werth der Unbekannten ansehen, nehmen wir zugleich an, dass die Beobachtungsfehler bez.

$$n - \frac{n+n'+n''+\text{etc.}}{m}$$
$$n' - \frac{n+n'+n''+\text{etc.}}{m}$$
$$n'' - \frac{n+n'+n''+\text{etc.}}{m}$$

u. s. w. seien. Aber es ist immer

$$\left(n-\frac{n+n'+n''+\text{etc.}}{m}\right)+\left(n'-\frac{n+n'+n''+\text{etc.}}{m}\right)+\left(n''-\frac{n+n'+n''+\text{etc.}}{m}\right)+\text{etc.}=0.$$

und wir erfüllen also, indem wir das arithmetische Mittel aus den Beobachtungen als den wahrscheinlichsten Werth der Unbekannten ansehen, wie auch die Anzahl der Beobachtungen beschaffen sei, die Bedingung, die strenge genommen stattfindet, wenn die Anzahl der Beobachtungen unendlich gross ist. Wir nähern uns also gewiss durch Vergrösserung der Anzahl der Beobachtungen dem wahren Werthe der Unbekannten, und dieses ist in der That alles was wir thun können, da die wahren Beobachtungsfehler uns stets unbekannt bleiben werden.

3.

Im vor. Art. ist schon eine Relation abgeleitet worden, die zwischen den übrig bleibenden Fehlern stattfindet, wenn man das arithmetische Mittel aus allen Beobachtungen als den wahrscheinlichsten Werth der Unbekannten betrachtet, aber es besteht zwischen diesen Fehlern noch eine merkwürdige Relation, die in dem folgenden Satze enthalten ist.

»Wenn man das arithmetische Mittel aus allen Beobachtungen als den wahrscheinlichsten Werth der Unbekannten betrachtet, so bewirkt man dadurch, dass die Summe der Quadrate der übrig bleibenden Fehler ein Minimum wird.«

Um diesen Satz zu beweisen, bemerke ich, dass man die übrig bleibenden Fehler durch $x-n$, $x-n'$, $x-n''$, etc. ausdrücken kann, und der Satz verlangt demzufolge, dass

$$(x-n)^2+(x-n')^2+(x-n'')^2+\text{etc.} = \text{Minimum}$$

sei. Es ist an sich klar, dass diese Function kein Maximum haben kann, denn lässt man x unbestimmt (positiv oder negativ) wachsen, so nähert

sich der Werth derselben immer mehr und mehr dem unendlich Grossen. Die bekannte Bedingung des Minimums giebt nun hier

$$(x-n)+(x-n')+(x-n'')+\text{etc.}=0$$

woraus

$$x=\frac{n+n'+n''+\text{etc.}}{m}$$

folgt. W. z. b. w.

4.

Es ist im Vorhergehenden angenommen worden, dass gleiche positive und negative Fehler gleich wahrscheinlich seien, wir wollen aber jetzt annehmen, dass dieses nicht der Fall sei, und die Folgen untersuchen, die dieser Umstand auf die Bestimmung der Unbekannten ausübt. Im jetzt zu betrachtenden Falle wird sich die Summe $e+e'+e''+$ etc. bei stets wachsender Anzahl von Beobachtungen nicht der Null, sondern einer gewissen positiven oder negativen Grösse nähern, die ich mit mk bezeichnen will, woraus folgt, dass der positive (oder bez. negative) Fehler $e+k$ mit dem negativen (oder bez. positiven) Fehler e gleiche Wahrscheinlichkeit hat. Aus einer stets wachsenden Anzahl von Beobachtungen wird man nun, wenn man wie vorher das arithmetische Mittel aus denselben zur Bestimmung von x anwendet, schliesslich

$$x=w+k$$

statt des wahren Werthes $x=w$ erhalten. Man kann nun nie durch irgend ein der Wahrscheinlichkeitsrechnung entlehntes Princip k von w trennen, sondern muss dafür andere Mittel in Anspruch nehmen, und diese können in nichts anderem bestehen, als in sorgfältiger Ausarbeitung und Anwendung der bei der Lösung der Aufgabe anderweitig in Betracht kommenden Theorien. Wenn sowohl die Theorie, zufolge welcher x sich aus den angestellten Beobachtungen ergiebt, als die Theorie des zur Beobachtung angewandten Instruments vollständig bekannt sind, und richtig angewandt werden, so können nie gleiche positive und negative Fehler verschiedene Wahrscheinlichkeiten haben, und es muss aus diesem Grunde $k=0$ werden. Wenn aber im Gegentheil diese Theorien, oder nur Eine derselben mangelhaft ist, oder unzweckmässig angewandt wird, dann ist es nachher unmöglich den constanten Fehler k aus dem Resultat der Beobachtungen zu entfernen. Aus diesen

Gründen wird im Verlaufe dieser Abhandlung stets stillschweigend angenommen werden, dass $k = 0$ ist.

5.

Ich nehme jetzt an, dass der Werth $x = N$ das nach dem Vorhergehenden aus m Beobachtungen genommene arithmetische Mittel sei. Man habe ferner, nachdem dieses Resultat schon berechnet worden ist, zur Bestimmung derselben Unbekannten x eine Reihe von m' anderen, von jenen unabhängigen, Beobachtungen angestellt, die einzeln für eben so genau wie jene gehalten werden müssen, und daraus auf dieselbe Weise $x = N'$ erhalten, später habe man noch m'' andere gleich gute Beobachtungen, und daraus $x = N''$ erhalten, u. s. w. Wenn man hierauf aus allen diesen Beobachtungen den wahrscheinlichsten Werth von x berechnen will, so ist es von selbst klar, dass die Gruppirungen, die vorher gemacht worden sind, keinen Einfluss auf das neue Resultat haben dürfen, und dass man jetzt wie vorher, ehe die m', m'', etc. Beobachtungen angestellt worden waren, aus allen nun vorhandenen Beobachtungen das arithmetische Mittel nehmen muss. Da mN die Summe der ersten, $m'N'$ die Summe der zweiten, $m''N''$ die Summe der dritten Gruppe von Beobachtungen ist, u. s. w., so hat jetzt das arithmetische Mittel aus allen Beobachtungen, oder mit anderen Worten der wahrscheinlichste Werth der Unbekannten

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad x = \frac{mN + m'N' + m''N'' + \text{etc.}}{m + m' + m'' + \text{etc.}}$$

zum Ausdruck. Wenn wir nun annehmen, dass der Werth von $x = N$ das Resultat einer einzigen Beobachtung von solcher Beschaffenheit wäre, dass man sie für eben so genau halten müsste, wie das arithmetische Mittel aus m solcher Beobachtungen, aus denen die anderen Gruppen bestehen, so ist an sich klar, dass der wahrscheinlichste Werth von x immer noch derselbe bleibt, den der Ausdruck (1) giebt, und da wir denselben Schluss auf alle übrigen Gruppen N', N'', etc. von Beobachtungen ausdehnen können, so ergiebt sich, dass der Ausdruck (1) immer noch der wahrscheinlichste Werth von x ist, wenn N, N', N'', etc. einzelne Beobachtungen von der Beschaffenheit sind, dass man die Beobachtung, welche N gegeben hat, für eben so genau halten muss, wie das arithmetische Mittel aus m, die welche N' gegeben hat, für eben so genau wie das arithmetische Mittel aus m', die welche N'' gegeben hat,

für eben so genau wie das arithmetische Mittel aus m'' u. s. w. anderen Beobachtungen, denen allen irgend eine und dieselbe Genauigkeit beigelegt werden muss. Wenn man daher unter der Bezeichnung des Gewichts irgend einer Beobachtung oder eines Resultats aus Beobachtungen die Anzahl von Beobachtungen von der Genauigkeit $= 1$ versteht, deren arithmetisches Mittel für eben so genau gehalten werden muss, wie diese Beobachtung oder dieses Resultat aus Beobachtungen, so können wir den Ausdruck (1) in folgenden Satz einkleiden:

»Wenn man für die Bestimmung einer Unbekannten mehrere Beobachtungen angestellt hat, die so beschaffen sind, dass man ihnen bez. die Gewichte m, m', m'', etc. beilegen muss, so erhält man den wahrscheinlichsten Werth dieser Unbekannten, wenn man das Resultat einer jeden Beobachtung mit seinem Gewicht multiplicirt, diese Produkte addirt und mit der Summe aller Gewichte dividirt.«

Es folgt ferner aus den obigen Betrachtungen der Satz:

»Das Gewicht dieser Bestimmung der Unbekannten ist der Summe der Gewichte aller dazu zugezogenen Beobachtungen gleich.«

6.

Aus den Betrachtungen des vor. Art. können wir ausserdem noch die folgenden Folgerungen ziehen.

Das Gewicht irgend einer Beobachtung oder eines Resultats aus Beobachtungen ist immer relativ zu verstehen, indem immer die Genauigkeit oder das Gewicht irgend einer bestimmten Gattung von Beobachtungen $= 1$ gesetzt werden muss.

Die obige Ableitung des Begriffs des Gewichts beschränkt sich, strenge genommen, nur auf die Fälle, wo die Gewichte ganze Zahlen sind, allein es ist sehr leicht den Begriff des Gewichts auch auf gebrochene oder irrationale Zahlen auszudehnen. Denn wenn man durch geeignete Mittel in Erfahrung gebracht hat, dass irgend eine Beobachtung für genauer gehalten werden muss wie das arithmetische Mittel aus m, hingegen für weniger genau wie das arithmetische Mittel aus $m+1$ Beobachtungen der Gattung deren Gewicht $= 1$ gesetzt wird, so ist es klar, dass das Gewicht dieser Beobachtung nur gleich m plus einem Bruchtheil der Einheit sein kann, und nichts hindert uns in solchen Fällen das Gewicht dieser Beobachtung demgemäss anzunehmen, wenn nur Mittel vorhanden sind den Bruchtheil zu bestimmen. Aus demselben

Grunde sind wir eben so wenig gehindert, das Gewicht einer Beobachtung, die für weniger genau gehalten werden muss wie eine Beobachtung der Gattung, deren Gewicht = 1 gesetzt worden ist, durch einen ächten Bruch auszudrücken.

Endlich bedingt der oben festgesetzte Begriff des Gewichts nothwendig eine positive Zahl, und ein negatives Gewicht kann keinen Sinn haben.

7.

Es ist hiebei noch das Folgende zu bemerken. Da die Genauigkeit der verschiedenen Beobachtungen von der ungenauesten an, deren Gewicht = 0 angenommen, oder die als verfehlt betrachtet und verworfen werden muss, bis zur genauesten durch unendlich kleine Abstufungen wächst, so lässt sich gewiss immer eine Gattung von Beobachtungen denken, in Bezug auf welche das Gewicht irgend einer beliebigen anderen Beobachtung durch eine ganze Zahl ausgedrückt werden kann. Verändert man hierauf die Gattung von Beobachtungen, deren Gewicht der Einheit gleich gesetzt worden ist, so kann man dadurch schon auf Gewichte kommen, die nicht mehr durch ganze Zahlen ausgedrückt werden können. Um dieses deutlicher zu machen, will ich annehmen, man habe verschiedene Beobachtungen, denen zufolge der Wahl der Gattung von Beobachtungen, deren Gewicht = 1 gesetzt worden ist, die Gewichte 2, 3, 4, etc. beigelegt werden müssen, ändert man hierauf jene Gattung von Beobachtungen, die zur Einheit des Gewichts dienen, und wählt dafür eine andere, z. B. eine solche deren Gewicht das Dreifache jenes ist, dann sind die Gewichte der übrigen Beobachtungen schon nicht durchaus mehr ganze Zahlen, sondern gehen in die folgenden über, $\frac{2}{3}$, 1, $\frac{4}{3}$, etc. Man sieht hieraus wie die obige Definition des Gewichts auch schon ohne die Betrachtungen des vor. Art. zu Hülfe zu ziehen, auf gebrochene Zahlen führen kann.

8.

Die Relation, die wir im Art. 5 zwischen dem Gewicht einer Beobachtung und dem Gewicht des arithmetischen Mittels aus einer gewissen Anzahl gleich guter Beobachtungen aufgestellt haben, führt uns auf die Aufgabe zu bestimmen: wie gross denn eigentlich die Genauigkeit des arithmetischen Mittels aus einer gewissen Anzahl gleich guter

Beobachtungen in Bezug auf die Genauigkeit einer jeden einzelnen dieser Beobachtungen sei?

Die Lösung dieser Aufgabe fällt der Wahrscheinlichkeitsrechnung anheim, wenn wir erst festgesetzt haben werden, was unter relativer Genauigkeit verstanden werden muss.

»Wenn die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler irgend einer Beobachtung oder irgend eines Resultats aus Beobachtungen zwischen den Grenzen $-c$ und $+c$ liegt, der Wahrscheinlichkeit gleich ist, dass der Fehler irgend einer anderen Beobachtung oder irgend eines anderen Resultats aus Beobachtungen zwischen den Grenzen $-c'$ und $+c'$ liegt, so verhält sich die Genauigkeit des ersten Resultats zu der des zweiten wie c' zu c.«

Vermittelst dieser Definition, die die einfachste und sachgemässeste ist, die man von dem Begriff der relativen Genauigkeit einer Beobachtung oder eines Resultats aus Beobachtungen aufstellen kann, wird es leicht sein das Verhältniss der Genauigkeit einer einzelnen Beobachtung zu der des arithmetischen Mittels aus irgend einer Anzahl für gleich gut zu haltenden Beobachtungen zu bestimmen, wenn wir von dem Gesichtspunkt ausgehen, dass das arithmetische Mittel überhaupt der wahrscheinlichste Werth der aus diesen Beobachtungen zu bestimmenden Unbekannten ist.

9.

Sei für irgend eine bestimmte Gattung von Beobachtungen die Wahrscheinlichkeit des Fehlers $\varDelta$ durch $\varphi\varDelta$, wo φ ein Functionszeichen ist, ausgedrückt, dann wird, wenn wir die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler irgend einer Beobachtung dieser Gattung innerhalb der Grenzen $\mp c$ liegt, mit w bezeichnen, w gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Fehler von $-c$ bis $+c$, und da die Beobachtungsfehler durch unendlich kleine Stufen wachsen oder abnehmen,

$$w = \int_{-c}^{+c} \varphi\varDelta \,.\, d\varDelta$$

Da ferner jeder Beobachtungsfehler gewiss innerhalb der Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ liegt, so ergiebt sich

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\varDelta \,.\, d\varDelta$$

Wenn wir ferner die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Anzahl von m gleich guter Beobachtungen beziehungsweise die Fehler $\varDelta'$, $\varDelta''$, etc. $\varDelta^{(m)}$ vorkommen mit W bezeichnen, so erhalten wir

$$W = \varphi\varDelta' \,.\, \varphi\varDelta'' \,\ldots\ldots\, \varphi\varDelta^{(m)}$$

Diese Sätze ergeben sich aus den Elementen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, wenn man die dort angenommenen endlichen Unterschiede in den überhaupt möglichen Fällen als unendlich klein betrachtet, oder die endliche Anzahl der möglichen Fälle in eine unendlich grosse Anzahl verwandelt. Endlich folgt aus denselben Betrachtungen, dass die Wahrscheinlichkeit, dass $\varDelta'$ zwischen den Grenzen $\mp a'$, $\varDelta''$ zwischen den Grenzen $\mp a''$, etc. liegt, durch das $m$fache Integral

$$\int_{-a'}^{+a'}\int_{-a''}^{+a''}\ldots\int_{-a^{(m)}}^{+a^{(m)}} W d\varDelta' \,.\, d\varDelta'' \ldots d\varDelta^{(m)}$$

ausgedrückt wird. Dieser Ausdruck gilt zwar nur wenn die Beobachtungen von einander unabhängig sind, aber diese Bedingung hindert nicht ihn auf den Fall auszudehnen, in welchem zwischen den Fehlergrenzen a', a'', etc. eine Relation besteht, wenn diese nur so beschaffen ist, dass sie unbeschadet der Unabhängigkeit der Beobachtungen von einander stattfinden kann. Wenn nun eine solche Relation angenommen wird, so muss man bei den verschiedenen Integrationen darauf Rücksicht nehmen. Sei

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad y = f(\varDelta', \varDelta'' \ldots)$$

diese Relation, worin y eine gegebene Grösse und f ein Functionszeichen ist, und die erste Aufgabe sei, die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass y zwischen den Grenzen $\mp b$ liege. Man muss um diese Aufgabe zu lösen, zuerst vermittelst dieser Relation eine der Veränderlichen $\varDelta'$, $\varDelta''$, etc. nebst dem Differential derselben aus dem obigen $m$fachen Integral eliminiren. Sei zu diesem Zweck

$$(3) \quad \ldots\ldots \quad \varDelta^{(m)} = F(y, \varDelta', \varDelta'', \ldots\ldots \varDelta^{(m-1)})$$

wo wieder F ein Functionszeichen ist, der Ausdruck für $\varDelta^{(m)}$, welcher sich aus dem obigen Ausdruck für y ergiebt, so bekommt man, wenn man nicht blos $\varDelta^{(m)}$ und $d\varDelta^{(m)}$ eliminirt, sondern auch den obigen Ausdruck für W substituirt,

$$(4) \quad W d\varDelta' . d\varDelta'' \ldots d\varDelta^{(m)} = K.\varphi\varDelta' . \varphi\varDelta'' \ldots \varphi\varDelta^{(m-1)} . d\varDelta' . d\varDelta'' \ldots d\varDelta^{(m-1)} . dy$$

wenn man zur Abkürzung

$$K = \varphi\,(F\,(y,\, \varDelta',\, \varDelta'',\, ..\, \varDelta^{(m-1)}))\, \frac{d\,.\,F\,(y,\, \varDelta',\, \varDelta'',\, ...\, \varDelta^{(m-1)})}{dy}$$

setzt, und die $m$fache Integration der rechten Seite dieser Gleichung muss jetzt so ausgeführt werden, dass man $\varDelta', \varDelta'', ... \varDelta^{(m-1)}$ innerhalb der Grenzen ausdehnt, für welche, wenn man y zwischen den Grenzen $\mp b$ nimmt, die Function F für $\varDelta^{(m)}$ alle möglichen Werthe giebt. Die Integration endlich in Bezug auf y muss innerhalb der Grenzen $\mp b$ ausgedehnt werden.

10.

Wenn wir nun das Vorstehende anwenden wollen um die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass die Summe der Fehler von m Beobachtungen innerhalb der Grenzen $\mp b$ liege, so wird die Relation (2) in

$$y = \varDelta' + \varDelta'' + \, ... \, + \varDelta^{(m)}$$

übergehen. Ich ziehe aber vor einen Schritt weiter zu gehen, und statt dieser Relation die folgende allgemeinere einzuführen,

$$y = \varepsilon'\varDelta' + \varepsilon''\varDelta'' + \, ... \, + \varepsilon^{(m)}\varDelta^{(m)}$$

worin $\varepsilon', \varepsilon'', .. \varepsilon^{(m)}$ gegebene, numerische Coefficienten bedeuten sollen, denn hiedurch können wir die Auflösung unserer Aufgabe, wie sich weiter unten ergeben wird, sogleich auf den Fall ausdehnen, in welchem die Beobachtungen verschiedene Gewichte haben, während der einfachere Fall, in welchem die Gewichte aller in Betracht gezogenen einander gleich sind, daraus erhalten wird, wenn man

$$\varepsilon' = \varepsilon'' = \text{etc.} = \varepsilon^{(m)} = 1$$

setzt. Die oben angenommene Relation giebt

$$\varDelta^{(m)} = \frac{y - \varepsilon'\varDelta' - \varepsilon''\varDelta'' - \, ... \, - \varepsilon^{(m-1)}\varDelta^{(m-1)}}{\varepsilon^{(m)}}$$

welche der allgemeinen Relation (3) entspricht. Hieraus ergiebt sich also

$$\frac{dF}{dy} = \frac{1}{\varepsilon^{(m)}}$$

Da ferner möglicher Weise jeder Fehler zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ liegen kann, und die Annahme dieser Grenzen für $\varDelta', \varDelta'', ... \varDelta^{(m-1)}$ nebst den Grenzen $\mp b$ für y in Folge der vorstehenden Gleichung dem Fehler $\varDelta^{(m)}$ alle möglichen Werthe zutheilt, so müssen die Integrationen innerhalb dieser Grenzen ausgeführt werden.

Wenn wir daher die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der bez. mit $\varepsilon', \varepsilon'', \ldots \varepsilon^{(m)}$ multiplicirten Beobachtungsfehler innerhalb der Grenzen $\mp b$ liege, mit W' bezeichnen, so wird zufolge der (4)

$$(5) \ldots W' = \frac{1}{\varepsilon^{(m)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-b}^{+b} M . \varphi\Delta' . \varphi\Delta'' \ldots . \varphi\Delta^{(m-1)}$$

wenn zur Abkürzung

$$M = \varphi \left(\frac{y - \varepsilon'\Delta' - \varepsilon''\Delta'' - \ldots - \varepsilon^{(m-1)}\Delta^{(m-1)}}{\varepsilon^{(m)}}\right) d\Delta' . d\Delta'' \ldots d\Delta^{(m-1)} . dy$$

gesetzt wird.

11.

Um diesen Ausdruck integriren zu können, müssen wir die Function φ kennen, und die Kenntniss davon erlangt man durch den an die Spitze dieser Abhandlung gestellten Grundsatz. Nehmen wir die Gleichung

$$W = \varphi\Delta' . \varphi\Delta'' \ldots \varphi\Delta^{(m)}$$

wieder vor, in welcher W die Wahrscheinlichkeit ist, dass in einer Reihe von m gleich guten Beobachtungen die Fehler $\Delta', \Delta'', \ldots \Delta^{(m)}$ vorkommen. Indem wir uns wieder des oben angezogenen Grundsatzes bedienen, nehmen wir zugleich an, dass das Zusammentreffen der durch diese Annahme sich ergebenden Fehler der Beobachtungen die grösste Wahrscheinlichkeit habe; die eine dieser Annahmen ist in der anderen enthalten. Wenn aber das Zusammentreffen der unter der genannten Bedingung sich ergebenden Fehler das wahrscheinlichste ist, so muss nothwendiger Weise W ein Maximum werden. Diese Bedingung giebt die Gleichung

$$0 = \frac{d\varphi\Delta'}{\varphi\Delta' . d\Delta'} \frac{d\Delta'}{dc} + \frac{d\varphi\Delta''}{\varphi\Delta'' . d\Delta''} \frac{d\Delta''}{dc} + \ldots + \frac{d\varphi\Delta^{(m)}}{\varphi\Delta^{(m)} . d\Delta^{(m)}} \frac{d\Delta^{(m)}}{dc}$$

wenn c das arithmetische Mittel aus den Beobachtungen bedeutet. Wenn aber wieder die beobachteten Werthe der Unbekannten mit $n', n'', \ldots n^{(m)}$ bezeichnet werden, so wird

$$\Delta' = n' - c, \quad \Delta'' = n'' - c, \ldots \Delta^{(m)} = n^{(m)} - c$$

und daher

$$\frac{d\Delta'}{dc} = \frac{d\Delta''}{dc} = \text{etc.} = \frac{d\Delta^{(m)}}{dc}$$

die obige Gleichung geht hiemit in

$$0 = \frac{d\varphi\Delta'}{\varphi\Delta'.d\Delta'} + \frac{d\varphi\Delta''}{\varphi\Delta''.d\Delta''} + \ldots + \frac{d\varphi\Delta^{(m)}}{\varphi\Delta^{(m)}.d\Delta^{(m)}} \quad . \; . \; . \quad (6)$$

über. Aber im Art. 2 wurde gefunden, dass in Folge der Annahme des arithmetischen Mittels als den wahrscheinlichsten Werth der Unbekannten, die Summe der übrig bleibenden Fehler Null ist, und hieraus erhalten wir jetzt

$$0 = \Delta' + \Delta'' + \ldots + \Delta^{(m)}$$

und da diese mit der Gleichung (6) zugleich stattfinden muss, so ergiebt sich allgemein, dass

$$\frac{d\varphi\Delta}{\varphi\Delta.d\Delta} = 2k\Delta$$

sein muss, wo k eine Constante ist, denn auf andere Art lässt sich den beiden Gleichungen zugleich nicht Gnüge leisten. Das Integral der vorstehenden Gleichung ist

$$\varphi\Delta = le^{k\Delta^2}$$

wo l die Integrationsconstante und e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen ist. Hiemit erhalten wir

$$W = l^m e^{k\,(\Delta'^2 + \Delta''^2 + \ldots + \Delta^{(m)\,2})}$$

und wenn die Summe der Quadrate der Fehler eines Maximums fähig wäre, so müsste k positiv angenommen werden. Da aber diese Summe nur eines Minimums fähig ist, so muss nothwendig k negativ sein, damit W ein Maximum werde. Setzt man um dieses auszudrücken $k = -h^2$, so wird

$$\varphi\Delta = le^{-h^2\Delta^2}$$

Es muss ferner, wie oben gezeigt wurde

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\Delta.d\Delta = 1$$

werden, und da

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2\Delta^2}\, d\Delta = \frac{\sqrt{\pi}}{h}$$

ist, wenn π das Verhältniss des Kreisumfanges zum Durchmesser bezeichnet, so ergiebt sich $l = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$, und es wird schliesslich

$$\varphi\Delta = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2\Delta^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

und

$$W = \frac{h^m}{\pi^{\frac{m}{2}}} e^{-h^2(\Delta'^2+\Delta''^2+\ldots+\Delta^{(m)2})}$$

wo $\Delta'^2+\Delta''^2+\ldots+\Delta^{(m)2}$ ein Minimum ist. Es folgt hieraus wieder der Satz, dass wenn man eine Unbekannte durch das arithmetische Mittel aus den dafür erhaltenen Beobachtungen bestimmt, man zugleich dadurch bewirkt, dass die Summe der Quadrate der übrig bleibenden Fehler ein Minimum wird; welcher Satz im Art. 3 auf andere Art schon bewiesen wurde.

12.

Es sollen nun, um in den folgenden Ausdrücken eine leichtere Uebersicht zu gewinnen, die folgenden Abkürzungen in den Bezeichnungen eingeführt werden,

$$\frac{\varepsilon'}{\varepsilon^{(m)}} = \theta', \quad \frac{\varepsilon''}{\varepsilon^{(m)}} = \theta'', \ldots \frac{\varepsilon^{(m-1)}}{\varepsilon^{(m)}} = \theta^{(m-1)}$$

$$\frac{h^m}{\varepsilon^{(m)}\pi^{\frac{m}{2}}} = l$$

$$\theta'\Delta'+\theta''\Delta''+\ldots.+\theta^{(m-1)}\Delta^{(m-1)} - \frac{y}{\varepsilon^{(m)}} = \Delta$$

Substituirt man nun den unter (7) erhaltenen Ausdruck für $\varphi\Delta$ in den Ausdruck (5), so ergiebt sich

$$W' = l\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-b}^{+b} E'd\Delta'.d\Delta''\ldots d\Delta^{(m-1)}.dy$$

wo zur Abkürzung

$$E' = e^{-h^2(\Delta^2+\Delta'^2+\Delta''^2+\ldots+\Delta^{(m-1)2})}$$

gesetzt worden ist. Betrachtet man aber das Integral

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2\{(\beta x+\gamma)^2+x^2+\delta\}}dx$$

und setzt darin

$$x = \frac{z}{\sqrt{1+\beta^2}} - \frac{\beta\gamma}{1+\beta^2}$$

so wird es

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2\left(z^2+\frac{\gamma^2}{1+\beta^2}+\delta\right)}dz$$

folglich, da

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 z^2}\, dz = \frac{\sqrt{\pi}}{h}$$

ist

$$P = \frac{1}{h}\sqrt{\frac{\pi}{1+\beta^2}}\; e^{-h^2\left(\frac{\gamma^2}{1+\beta^2}+\delta\right)}$$

Wendet man diesen Ausdruck auf den obigen Ausdruck für W' an, so ergiebt sich nach der ersten Integration

$$W' = \frac{l}{h}\sqrt{\frac{\pi}{1+\theta'^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-b}^{+b} E'' d\Delta''.\, d\Delta''' \dots .\, d\Delta^{(m-1)}.\, dy$$

wo

$$E'' = e^{-h^2\left\{\frac{(\Delta-\theta'\Delta')^2}{1+\theta'^2}+\Delta''^2+\Delta'''^2+\dots+\Delta^{(m-1)2}\right\}}$$

ist. Nach der zweiten Integration erhält man

$$W' = \frac{l}{h^2}\sqrt{\frac{\pi^2}{1+\theta'^2+\theta''^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-b}^{+b} E''' d\Delta''' \dots d\Delta^{(m-1)}.\, dy$$

wo

$$E''' = e^{-h^2\left\{\frac{(\Delta-\theta'\Delta'-\theta''\Delta'')^2}{1+\theta'^2+\theta''^2}+\Delta'''^2+\dots+\Delta^{(m-1)2}\right\}}$$

ist, nach der dritten Integration wird

$$W' = \frac{l}{h^3}\sqrt{\frac{\pi^3}{1+\theta'^2+\theta''^2+\theta'''^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-b}^{+b} E^{IV} d\Delta^{IV} \dots d\Delta^{(m-1)}.\, dy$$

wo

$$E^{IV} = e^{-h^2\left\{\frac{(\Delta-\theta'\Delta'-\theta''\Delta''-\theta'''\Delta''')^2}{1+\theta'^2+\theta''^2+\theta'''^2}+\Delta^{IV2}+\dots+\Delta^{(m-1)2}\right\}}$$

ist, und das Gesetz des Fortganges stellt sich jetzt deutlich hervor. Nach der $(m-2)$ten Integration wird folglich

$$W' = \frac{l}{h^{m-2}}\,\frac{\pi^{\frac{m-2}{2}}}{\sqrt{1+\theta'^2+\theta''^2+\dots+\theta^{(m-2)2}}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-b}^{+b} E^{(m-1)}\, d\Delta^{(m-1)}.\, dy$$

wo

$$E^{(m-1)} = e^{-h^2\left\{\frac{\left(\theta^{(m-1)}\Delta^{(m-1)}-\frac{y}{\varepsilon^{(m)}}\right)^2}{1+\theta'^2+\theta''^2+\dots+\theta^{(m-2)2}}+\Delta^{(m-1)2}\right\}}$$

ist. Führt man nun auch die $(m-1)$te Integration auf dieselbe Weise aus und substituirt die Ausdrücke der eingeführten Hülfsgrössen, so bekommt man

$$W' = \frac{h}{\sqrt{\pi}.\sqrt{\varepsilon'^2+\varepsilon''^2+\ldots+\varepsilon^{(m)2}}}\int_{-b}^{+b} e^{-\frac{h^2y^2}{\varepsilon'^2+\varepsilon''^2+\ldots+\varepsilon^{(m)2}}}\,dy$$

womit alle Integrationen ausgeführt sind, die man ohne Hülfe von unendlichen Reihen erhalten kann.

13.

Nehmen wir nun an, dass die eben gefundene Wahrscheinlichkeit der Wahrscheinlichkeit gleich sein soll, dass der Fehler irgend einer der in Betracht gezogenen Beobachtungen innerhalb der Grenzen $\mp a$ enthalten sei, so wird zufolge des Vorhergehenden auch

$$W' = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-a}^{+a} e^{-h^2y^2}\,dy$$

und es muss die Relation zwischen a und b aus der folgenden Gleichung bestimmt werden

$$\int_{-a}^{+a} e^{-h^2y^2}\,dy = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon'^2+\varepsilon''^2+\ldots+\varepsilon^{(m)2}}}\int_{-b}^{+b} e^{-\frac{h^2y^2}{\varepsilon'^2+\varepsilon''^2+\ldots+\varepsilon^{(m)2}}}\,dy$$

Sei

$$y^2 = u^2\,(\varepsilon'^2+\varepsilon''^2+\ldots\ldots+\varepsilon^{(m)2})$$

dann wird

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon'^2+\varepsilon''^2+\ldots+\varepsilon^{(m)2}}}\int_{-b}^{+b} e^{-\frac{h^2y^2}{\varepsilon'^2+\varepsilon''^2+\ldots+\varepsilon^{(m)2}}}\,dy = \int_{-c}^{+c} e^{-h^2u^2}\,du$$

wenn

$$c = \frac{b}{\sqrt{\varepsilon'^2+\varepsilon''^2+\ldots+\varepsilon^{(m)2}}}$$

gesetzt wird. Die obige Bedingungsgleichung geht hiemit in die folgende

$$\int_{-a}^{+a} e^{-h^2y^2}\,dy = \int_{-c}^{+c} c^{-h^2u^2}\,du$$

über und hieraus folgt

$$b = a\sqrt{\varepsilon'^2+\varepsilon''^2+\ldots+e^{(m)2}}$$

welches die gesuchte Relation ist.

Diese Relation giebt in Verbindung mit der im Art. 8 gegebenen Definition der relativen Genauigkeit sogleich den folgenden

1sten Satz.

»Die Genauigkeit der Summe von m gleich guten, beziehungsweise mit den gegebenen Factoren ε', ε'', . $\varepsilon^{(m)}$ multiplicirten Beobachtungen verhält sich zur Genauigkeit Einer dieser Beobachtungen wie

$$1 : \sqrt{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2 + \ldots + \varepsilon^{(m)2}}.«$$

Nehmen wir an, dass $\varepsilon' = \varepsilon'' = \text{etc.} = \varepsilon^{(m)} = \frac{1}{m}$ sei, dann geht die eben bezeichnete Function der Beobachtungen in das arithmetische Mittel aus denselben über, und wir erhalten daher sogleich den folgenden

2ten Satz.

»Die Genauigkeit des arithmetischen Mittels aus m gleich guten Beobachtungen verhält sich zur Genauigkeit irgend Einer derselben wie

$$\sqrt{m} : 1.«$$

Die Verbindung dieses Satzes mit der im Art. 5 aufgestellten Definition des Gewichts einer Bestimmung aus Beobachtungen zeigt, dass das Gewicht einer Beobachtung oder eines Resultats aus Beobachtungen dem Quadrat der Genauigkeit derselben proportional ist.

Man kann den ersten obigen Satz leicht auf Beobachtungen von ungleicher Genauigkeit ausdehnen. Wenn man annimmt, dass die Fehler e', e'', . . . $e^{(m)}$ solchen Beobachtungen angehören, deren Genauigkeiten bez. den Zahlen $\sqrt{p'}$, $\sqrt{p''}$, . . . $\sqrt{p^{(m)}}$ proportional sind, so gehören die Fehler $e'\sqrt{p'}$, $e''\sqrt{p''}$ . . . $e^{(m)}\sqrt{p^{(m)}}$ gewiss Beobachtungen von gleicher Genauigkeit an, denn durch die Multiplication der Fehler mit den Zahlen $\sqrt{p'}$, $\sqrt{p''}$, etc. werden diese gewiss $\sqrt{p'}$ mal $\sqrt{p''}$ mal, etc. vergrössert, also die Genauigkeiten gewiss eben so viel verkleinert, und auf gleiches Maass gebracht. Bezeichnen wir daher die Fehler $e'\sqrt{p'}$. $e''\sqrt{p''}$, etc. mit Δ', Δ'', etc., so kann der Ausdruck

$$\varepsilon'e' + \varepsilon''e'' + \ldots + \varepsilon^{(m)}e^{(m)}$$

sogleich in den folgenden verwandelt werden

$$\frac{\varepsilon'}{\sqrt{p'}}\Delta' + \frac{\varepsilon''}{\sqrt{p''}}\Delta'' + \ldots + \frac{\varepsilon^{(m)}}{\sqrt{p^{(m)}}}\Delta^{(m)}$$

und hiemit ergiebt sich der

3te Satz.

»Die Genauigkeit der Summe von m, bez. mit den gegebenen Factoren $\varepsilon', \varepsilon'', \ldots \varepsilon^{(m)}$ multiplicirten Beobachtungen, deren relative Genauigkeiten den Zahlen $\sqrt{p'}, \sqrt{p''}, \ldots \sqrt{p^{(m)}}$ proportional sind, oder mit anderen Worten, denen die Gewichte $p', p'', \ldots p^{(m)}$ beigelegt werden müssen, verhält sich zur Genauigkeit Einer Beobachtung der Gattung, deren Genauigkeit oder Gewicht als Einheit angenommen worden ist, wie

$$1 : \sqrt{\frac{\varepsilon'^2}{p'} + \frac{\varepsilon''^2}{p''} + \ldots + \frac{\varepsilon^{(m)2}}{p^{(m)}}}.«$$

Das Gewicht eines aus solchen Beobachtungen gezogenen Resultats hat also, wenn man es mit P bezeichnet,

$$(8) \quad \ldots\ldots \quad P = \frac{1}{\frac{\varepsilon'^2}{p'} + \frac{\varepsilon''^2}{p''} + \ldots + \frac{\varepsilon^{(m)2}}{p^{(m)}}}$$

zum Ausdruck, und bedeutet, dass dieses Resultat für eben so genau gehalten werden muss, als wäre es das arithmetische Mittel aus P solcher Beobachtungen, deren Gewicht oder Genauigkeit $= 1$ ist.

14.

Wenden wir zu näherer Erläuterung des Ausdrucks (8) denselben auf die einfachsten Functionen von zwei Grössen an. Seien durch die Beobachtungen die Grösse a mit dem Gewicht p, und die Grösse a' mit dem Gewicht p' erhalten, man fragt zuerst nach dem Gewicht der Function

$$\tfrac{1}{2}(a \pm a')$$

Hiefür giebt der Ausdruck (8), da hier $\varepsilon' = \frac{1}{2}$, $\varepsilon'' = \pm \frac{1}{2}$ ist

$$P = \frac{4pp'}{p+p'}$$

oder wenn $p' = p$ ist,

$$P = 2p$$

mit dem 2. Satze übereinstimmend, wenn wir blos das obere Zeichen annehmen. Fragt man ausserdem nach dem Gewicht der Function

$$a \pm a'$$

wenn die Gewichte dieselben sind wie vorher, so giebt der Ausdruck (8), da nun $\varepsilon' = 1$, $\varepsilon'' = \pm 1$ ist,

$$P = \frac{pp'}{p+p'}$$

oder wenn man $p' = p$ macht

$$P = \tfrac{1}{2}p$$

Wenn man hier unter a und a' die bei einer Triangulation von einer und derselben Station aus eingeschnittenen Richtungen zweier Dreieckspunkte versteht, so ist $a - a'$ der durch die Beobachtungen erhaltene Winkel zwischen diesen beiden Punkten, und setzt man das Gewicht der Bestimmung einer jeden der beiden Richtungen $= 1$, so ist das Gewicht des Winkels nur $= \frac{1}{2}$, oder die Genauigkeit des Letzteren nur $= \sqrt{\tfrac{1}{2}}$.

15.

Nehmen wir jetzt wieder die Gleichung (1) vor, nemlich

$$x = \frac{mN + m'N' + m''N'' + \ldots}{m + m' + m'' + \ldots}$$

welche den wahrscheinlichsten Werth von x giebt, wenn die beobachteten Werthe N, N', N'', etc. bez. die Gewichte m, m', m'', etc. haben.

Wenn nun die Beobachtungen nicht unmittelbar $x = N$, $x = N'$, etc., sondern statt dessen $ax = n$, $a'x = n'$, etc. gegeben haben, wo a, a', etc. bestimmte, durch die Theorie der Aufgabe, welche auf die Bestimmung von x hinführt, gegebene numerische Coefficienten sind, dann ist in den aus diesen Gleichungen folgenden Werthen $x = \frac{n}{a}$, $x' = \frac{n'}{a'}$, etc. $\frac{n}{a}$ gewiss $a$mal genauer wie n, $\frac{n'}{a'}$ gewiss a'mal genauer wie n', u. s. w., weil die Fehler, womit n, n', etc. behaftet sind, durch die angeführten Divisionen gewiss a, a', etc. mal verkleinert worden. Wenn nun die Genauigkeit aller Beobachtungen, welche n, n', etc. gegeben haben, für dieselbe gehalten werden muss, so werden in Folge der Gleichung (8) die Gewichte der daraus hervorgehenden einzelnen Bestimmungen

$$x = \frac{n}{a},\quad x = \frac{n'}{a'},\quad x = \frac{n''}{a''},\ \text{etc.}$$

bez. a^2, a'^2, a''^2, etc. sein, wenn $p' = p'' = \text{etc.} = 1$ gesetzt wird. Es wird daher jetzt

$$m = a^2,\ m' = a'^2,\ m'' = a''^2,\ \text{etc.}$$
$$N = \frac{n}{a},\ N' = \frac{n'}{a'},\ N'' = \frac{n''}{a''},\ \text{etc.}$$

und der durch die oben angeführte Gleichung ausgedrückte wahrscheinlichste Werth von x bekommt

$$x = \frac{an + a'n' + a''n'' + \ldots}{a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots}$$

zum Ausdruck, und das Gewicht dieser Bestimmung ist $= a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots.$

16.

Wenn hingegen die Beobachtungen, welche n für ax, n' für $a'x$, n'' für $a''x$, u. s. w. gegeben haben, für ungleich genau gehalten werden müssen, und zwar die erste für so genau wie das arithmetische Mittel aus p, die zweite für so genau wie das aus p', die dritte für so genau wie das aus p'', u. s. w. Beobachtungen von gleicher als Einheit angenommener Genauigkeit, so werden die Gewichte der einzelnen Bestimmungen von ax, $a'x$, $a''x$, etc. zufolge der Gleichung (8) a^2p, a'^2p', a''^2p'', etc. zum Ausdruck haben, und es wird also jetzt

$$m = a^2p,\ m' = a'^2p',\ m'' = a''^2p'',\ \text{etc.}$$

während wie vorher die Gleichungen

$$N = \frac{n}{a},\ N' = \frac{n'}{a'},\ N'' = \frac{n''}{a''},\ \text{etc.}$$

bleiben. Der allgemeine Ausdruck zu Anfang des vor. Art. giebt folglich jetzt für den wahrscheinlichsten Werth von x den Ausdruck

$$(9) \quad \ldots\ldots \quad x = \frac{pan + p'a'n' + p''a''n'' + \ldots}{pa^2 + p'a'^2 + p''a''^2 + \ldots}$$

mit dem Gewicht $= pa^2 + p'a'^2 + p''a''^2 + \ldots$

Man sieht, dass der am Ende des vor. Art. gefundene Ausdruck für x sich als einen speciellen Fall des vorstehenden ausweist, wie es auch sein muss, und dass der vorstehende in jenen übergeht, wenn man alle Gewichte p, p', p'', etc. einander gleich macht.

Der eben gefundene Ausdruck für x kann auf zweierlei Weise einfach durch Worte ausgedrückt werden.

1) Wenn man für die Bestimmung der Unbekannten x durch Beobachtungen, die von einander unabhängig sind, die Werthe n, n', n'', etc. erlangt hat, denen bez. die Gewichte p, p', p'', etc. beigelegt werden müssen, und die mit der Unbekannten durch die Gleichungen

$$ax = n,\ a'x = n',\ a''x = n'',\ \text{etc.}$$

verbunden sind, dann erhält man den wahrscheinlichsten Werth von x, wenn man jede dieser Gleichungen mit dem Produkt des Gewichts derselben in den Coefficienten von x multiplicirt, die so abgeänderten Gleichungen addirt, und aus dieser Summe x auf gewöhnliche Art ableitet, nemlich das bekannte Glied mit dem Coefficienten von x dividirt. Das Gewicht dieser Bestimmung ist dem eben genannten Divisor gleich.

2) Man bringe die gegebenen Gleichungen auf Gleichungen, die gleiche Genauigkeit haben, welches dem Vorhergehenden zufolge dadurch bewirkt wird, dass man sie bez. mit $\sqrt{p}$, $\sqrt{p'}$, $\sqrt{p''}$, etc. multiplicirt, wodurch

$$\sqrt{p}.ax = \sqrt{p}.n\,, \quad \sqrt{p'}.a'x = \sqrt{p'}.n'\,, \quad \sqrt{p''}.a''x = \sqrt{p''}.n''\,, \text{ etc.}$$

erhalten wird. Hierauf multiplicire man jede dieser Gleichungen mit dem jetzt stattfindenden Coefficienten von x, bilde die Summe derselben, und dividire wieder das bekannte Glied mit dem nunmehrigen Coefficienten von x. Es ist klar, dass der obige Ausdruck für x auch aus diesem Verfahren hervorgeht.

17.

Wenn die Bedingung, die das Vorhergehende involvirt, nemlich dass die Unbekannte unmittelbar durch eine linearische Gleichung gegeben sei, nicht erfüllt ist, so erleiden die erhaltenen Ausdrücke durchaus keine Aenderung. Um dieses zu zeigen, sei überhaupt

$$fX = N$$

wo f ein Functionszeichen und X die Unbekannte ist, die Gleichung, welche die Lösung einer vorgegebenen Aufgabe bildet, und so beschaffen ist, dass der vollständige Werth von N nur durch Beobachtungen erlangt werden kann. Sei ξ ein genäherter Werth von X, und der wahrscheinlichste Werth dieser Unbekannten

$$X = \xi + x$$

wo ξ so nahe richtig angenommen wird, dass man mit der Berücksichtigung der ersten Potenz von x ausreicht. Setzt man hierauf

$$f\xi = \nu\,, \quad \frac{df\xi}{d\xi} = a\,, \quad N - \nu = n$$

so bekommt man

$$ax = n$$

Wendet man die Gleichung $fX = N'$ auf einen anderen Fall an, der aber so beschaffen sein muss, dass die Unbekannte X keine Aenderung erlei-

det, und nur in der Function f ausser N sich eine oder mehrere Constanten geändert haben, dann ergiebt sich eben so

$$a'x = n'$$

u. s. w. Durch dieses Verfahren kann man jedem Falle die der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu unterwerfenden Bestimmungen auf linearische Gleichungen von der Form hinführen, die im Vorhergehenden angenommen worden sind.

§. 2. Ausdehnung des Vorhergehenden auf den Fall, in welchem die Werthe mehrerer unabhängiger Unbekannten durch Beobachtungen zu bestimmen sind.

18.

Bis jetzt ist angenommen worden, dass die durch Hülfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu lösende Aufgabe auf nur Eine Unbekannte hingeführt hat, während von nun an die Fälle betrachtet werden sollen, wo mehrere Unbekannten vorhanden sind. An den Inhalt des vor. Art. anknüpfend bemerke ich zuerst, dass auch in diesen Fällen die Bestimmung der wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten auf die Ermittelung derselben aus einem System von linearischen Gleichungen hingeführt werden kann. Seien die Gleichungen, die die Auflösung der Aufgabe bilden,

$$f(X,\ X',\ X'',\ \text{etc.}) = L$$
$$F(X,\ X',\ X'',\ \text{etc.}) = L'$$
$$\varphi(X,\ X',\ X'',\ \text{etc.}) = L''$$

u. s. w. wo f, F, φ etc. Functionszeichen, X, X', X'', etc. die Unbekannten, und L, L', L'', etc. durch Beobachtungen zu ermittelnde Grössen sind. Nachdem man sich die genäherten Werthe ξ, ξ', ξ'', etc. der Unbekannten verschafft hat, welches immer möglich ist, seien die wahrscheinlichsten Werthe derselben

$$X = \xi + x\,, \quad X' = \xi' + x'\,, \quad X'' = \xi'' + x''\,, \text{ etc.}$$

wo x, x', x'', etc. so klein angenommen werden, dass man mit den ersten Potenzen derselben ausreicht. Setzt man hierauf

$$f(\xi,\ \xi',\ \xi'',\ \text{etc.}) = \lambda$$
$$F(\xi,\ \xi',\ \xi'',\ \text{etc.}) = \lambda'$$
$$\varphi(\xi,\ \xi',\ \xi'',\ \text{etc.}) = \lambda''$$
$$\text{etc.}$$

$$\left(\frac{df}{d\xi}\right) = a\ ,\quad \left(\frac{df}{d\xi'}\right) = b\ ,\quad \left(\frac{df}{d\xi''}\right) = c\ ,\ \text{etc.}$$
$$\left(\frac{dF}{d\xi}\right) = a'\ ,\quad \left(\frac{dF}{d\xi'}\right) = b'\ ,\quad \left(\frac{dF}{d\xi''}\right) = c',\ \text{etc.}$$
$$\left(\frac{d\varphi}{d\xi}\right) = a''\ ,\quad \left(\frac{d\varphi}{d\xi'}\right) = b''\ ,\quad \left(\frac{d\varphi}{d\xi''}\right) = c'',\ \text{etc.}$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

so werden

$$\begin{aligned} ax + bx' + cx'' + \text{etc.} + \lambda &= L \\ a'x + b'x' + c'x'' + \text{etc.} + \lambda' &= L' \\ a''x + b''x' + c''x'' + \text{etc.} + \lambda'' &= L'' \\ \text{etc} \qquad\qquad & \text{etc.} \end{aligned}$$

welche Gleichungen die verlangte Form haben, und zu welchen bemerkt werden kann, dass alle durch die Rechnung erhaltenen Grössen sich auf der einen, und die durch die Beobachtungen erhaltenen Grössen sich auf der anderen Seite der Gleichheitszeichen befinden, gleich wie dieses in den ähnlichen Gleichungen des vor. §. auch stattfand. Setzt man ferner

$$L - \lambda = l\ ,\quad L' - \lambda' = l'\ ,\quad L'' - \lambda'' = l'',\ \text{etc.}$$

so werden die vorstehenden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} ax + bx' + cx'' + \text{etc.} &= l \\ a'x + b'x' + c'x'' + \text{etc.} &= l' \\ a''x + b''x' + c''x'' + \text{etc.} &= l'' \\ \text{etc.} \qquad\qquad & \text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (10)$$

in welchen, wenn die Beobachtungen nur nicht gar zu ungenau sind, oder die genäherten Werthe ξ, ξ', ξ'', etc. der Unbekannten sich nicht allzuweit von den wahren oder wahrscheinlichsten Werthen entfernen, die völlig bekannten Glieder kleine Zahlenwerthe haben.

Sollte es sich nach der Durchführung der Auflösung dieser Gleichungen zeigen, dass die zu deren Erlangung angewandten genäherten Werthe ξ, ξ', ξ'', etc. nicht so genau gewesen sind, dass man mit den ersten Potenzen von x, x', x'', etc. ausreichte, so giebt die Auflösung wenigstens mehr genäherte Werthe der Unbekannten, durch deren Substitution und Wiederholung der Auflösung man genauere Werthe erhält, u. s. w. wenn nöthig.

Fassen wir vor allem Anderen die Zahl der Gleichungen (10) und die Zahl der darin vorkommenden Unbekannten in's Auge, so sind drei Fälle möglich, es kann

1) die Zahl dieser Gleichungen kleiner sein wie die der Unbekannten,

2) die Zahl der Gleichungen denen der Unbekannten gleich sein,

3) die Zahl der Gleichungen grösser sein, wie die der Unbekannten.

Im ersten Falle ist es hier, wie immer, unmöglich bestimmte Werthe der Unbekannten zu erhalten, im zweiten lässt sich nichts weiter thun, wie die Gleichungen auf gewöhnliche Weise aufzulösen, und nur im dritten Falle fällt die Auflösung derselben in den Bereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Der dritte Fall soll daher im Folgenden stets als stattfindend angenommen werden, wobei der zweite Fall jedoch nicht unbedingt ausgeschlossen ist, da sich zeigen wird, dass die für den dritten Fall sich ergebende Auflösung auch auf den zweiten anwendbar ist, alsdann aber dieselben Werthe der Unbekannten giebt, die man durch die gewöhnliche Auflösung erhält.

19.

Die Gleichungen (10) lassen sich sofort auf die allgemeinsten der im Vorhergehenden betrachteten Gleichungen, nemlich auf

$$ax = n\,,\quad a'x = n'\,,\quad a''x = n''\,,\ \text{etc.}$$

hinführen, es braucht dafür nur

$$\begin{aligned} n &= l - bx' - cx'' - \ldots \\ n' &= l' - b'x' - c'x'' - \ldots \\ n'' &= l'' - b''x' - c''x'' - \ldots \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

gesetzt zu werden. Die Grössen n, n', n'', etc. haben zwar gegenwärtig keine bestimmten Werthe wie im Vorhergehenden der Fall war, sondern hängen mit von den noch unbestimmten Grössen x', x'', etc. ab. Aber die einzige Eigenschaft worauf es hier ankommt besitzen sie, sie sind Grössen, die durch Beobachtungen bestimmt werden, und die Functionen

$$\begin{aligned} &l - bx' - cx'' - \ldots \\ &l' - b'x' - c'x'' - \ldots \\ &l'' - b''x' - c''x'' - \ldots \end{aligned}$$

u. s. w. sind jetzt eben sowohl die durch Beobachtungen erlangten Werthe von ax, $a'x$, $a''x$, etc. wie n, n', n'', etc. im Vorhergehenden. Der Ausdruck (9) ist daher immer noch der wahrscheinlichste Werth von x, wenn den Gleichungen (10), oder vielmehr den in denselben enthaltenen Grössen l, l', l'', etc. der Reihe nach die Gewichte p, p', p'', etc.

beigelegt werden. Substituirt man daher die vorstehenden Werthe von n, n', n'', etc. in die Gleichungen (9) und setzt zur Abkürzung

$$\begin{aligned} (aa) &= pa^2 + p'a'^2 + p''a''^2 + \dots \\ (ab) &= pab + p'a'b' + p''a''b'' + \dots \\ (ac) &= pac + p'a'c' + p''a''c'' + \dots \\ &\vdots \\ (al) &= pal + p'a'l' + p''a''l'' + \dots \end{aligned}$$

so wird der wahrscheinlichste Werth von x

$$x = \frac{(al) - (ab)x' - (ac)x'' - \dots}{(aa)}$$

Wenn nun durch anderweitige Bestimmungen die wahrscheinlichsten Werthe von x', x'', etc. erlangt werden können, so giebt die Substitution dieser einen bestimmten wahrscheinlichen Werth von x. Solche anderweitigen Bestimmungen sind zu erhalten, denn dasselbe Verfahren, welches wir eben zur Bestimmung von x angewandt haben, kann auch zur Bestimmung der übrigen Unbekannten angewandt werden. Setzt man jetzt

$$\begin{aligned} n &= l - a x - c x'' - \dots \\ n' &= l' - a' x - c' x'' - \dots \\ n'' &= l'' - a'' x - c'' x'' - \dots \end{aligned}$$

u. s. w. und substituirt diese in die (9), nachdem sie in die folgende abgeändert worden ist,

$$x' = \frac{pbn + p'b'n' + p''b''n'' + \dots}{pb^2 + p'b'^2 + p''b''c''^2 \dots}$$

so wird der wahrscheinlichste Werth von x'

$$x' = \frac{(bl) - (ab)x - (bc)x'' - \dots}{(bb)}$$

wenn zur Abkürzung

$$\begin{aligned} (bb) &= pb^2 + p'b'^2 + p''b''^2 + \dots \\ (bc) &= pbc + p'b'c' + p''b''c'' + \dots \\ &\vdots \\ (bl) &= pbl + p'b'l' + p''b''l'' + \dots \end{aligned}$$

gesetzt wird. Eben so erhält man für x'' den wahrscheinlichsten Werth

$$x'' = \frac{(cl) - (ac)x - (bc)x' - \dots}{(cc)}$$

wo

$$\begin{aligned} (cc) &= pc^2 + p'c'^2 + p''c''^2 + \dots \\ &\vdots \\ (cl) &= pcl + p'c'l' + p''c''l'' + \dots \end{aligned}$$

ist, und so ferner, wenn die Zahl der Unbekannten grösser ist. Da die für x, x', x'', etc. eben entwickelten Gleichungen neben einander bestehen müssen, so erhält man die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten in bestimmten Ausdrücken durch wechselseitige Elimination derselben, aus den obigen Gleichungen, die auch wie folgt gestellt werden können

$$(11) \quad \dots \quad \begin{cases} (aa)x + (ab)x' + (ac)x'' + \dots = (al) \\ (ab)x + (bb)x' + (bc)x'' + \dots = (bl) \\ (ac)x + (bc)x' + (cc)x'' + \dots = (cl) \\ \text{etc.} \qquad\qquad\qquad \text{etc.} \end{cases}$$

20.

Die im vor. Art. erhaltene Auflösung unserer Aufgabe kann erst dann als vollständig betrachtet werden, wenn nachgewiesen wird, dass das System von Gleichungen (11), auf welches wir gekommen sind, so beschaffen ist, dass in jedem Falle die Unbekannten daraus bestimmt werden können. Die erste Bedingung hiefür ist, dass die Zahl der Gleichungen der der Unbekannten gleich ist, und dass diese Bedingung erfüllt ist, lehrt der Augenschein. Die zweite Bedingung ist, dass von den gegebenen Gleichungen keine in den übrigen enthalten ist, oder ihnen widerspricht, und dieses ist hier zu untersuchen.

Bezeichnen wir die Gleichungen (11) zur Abkürzung mit $v = 0$, $v' = 0$, $v'' = 0$, etc., dann wird das Nichtvorhandensein der zweiten Bedingung zur Folge haben, dass sich eine Gleichung von der Form

$$v + \alpha v' + \beta v'' + \dots = 0 \text{ oder } = \text{constante.}$$

aufstellen lässt, die unabhängig von den Unbekannten erfüllt ist, und umgekehrt, wenn eine solche Gleichung nicht vorhanden ist, dann ist die obige zweite Bedingung erfüllt, und die Unbekannten x, x', x'', etc. sind durch die Gleichungen (11) bestimmbar. Substituirt man die Gleichungen (11) in die vorstehende, und setzt, wie für das Erfülltsein derselben nothwendig ist, die Coefficienten der Unbekannten, jeden für sich, gleich Null, so bekommt man

$$(12) \quad \dots \quad \begin{cases} 0 = (aa) + \alpha(ab) + \beta(ac) + \dots \\ 0 = (ab) + \alpha(bb) + \beta(bc) + \dots \\ 0 = (ac) + \alpha(bc) + \beta(cc) + \dots \\ \quad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \end{cases}$$

deren Anzahl um Eine grösser ist, wie die der Unbekannten α, β, etc., und die also nur bedingungsweise erfüllt werden können. Seien

$$\begin{aligned}\varrho &= pa + \alpha pb + \beta pc + \ldots,\\ \varrho' &= p'a' + \alpha p'b' + \beta p'c' + \ldots\\ \varrho'' &= p''a'' + \alpha p''b'' + \beta p''c'' + \ldots\\ &\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}\end{aligned}$$

erhebt man diese ins Quadrat, dividirt darauf bez. mit p, p', p'', etc. und addirt, so wird in Folge der (12)

$$0 = \frac{\varrho^2}{p} + \frac{\varrho'^2}{p'} + \frac{\varrho''^2}{p''} + \ldots$$

woraus, da alle p positiv sind

$$\varrho = 0\,, \quad \varrho' = 0\,, \quad \varrho'' = 0\,, \text{ etc.}$$

folgt. Es wird also

$$\begin{aligned}0 &= a + \alpha b + \beta c + \ldots\\ 0 &= a' + \alpha b' + \beta c' + \ldots\\ 0 &= a'' + \alpha b'' + \beta c'' + \ldots\\ &\text{etc.} \qquad \text{etc.}\end{aligned}$$

Diese sind die Gleichungen (10), von welchen wir ausgegangen sind, mit dem Unterschiede, dass die völlig bekannten Glieder fehlen, und die Zahl der Unbekannten um Eine kleiner ist. Den vorstehenden Gleichungen kann aber nur in dem Falle Gnüge geleistet werden, wenn unter ihnen eine so grosse Anzahl in den übrigen enthalten ist, dass die Zahl der von einander unabhängigen $m - 1$ ist, wenn m die Zahl der Unbekannten x, x', x'', etc. bezeichnet. In diesem Falle können aber aus den (10) die Unbekannten überhaupt nicht bestimmt werden. Sind im Gegentheil von den vorstehenden Gleichungen gar keine, oder eine geringere Zahl in den übrigen enthalten, so kann weder diesen noch den Gleichungen (12) Gnüge geleistet werden, und die Gleichungen (11) bestimmen die Unbekannten unzweideutig. Wir kommen daher auf den Schluss, dass wenn durch die Gleichungen (10) die Unbekannten entweder völlig bestimmt, oder mehr wie bestimmt sind, die (11) die Unbekannten völlig bestimmen, wenn aber im Gegentheil die (10) die Unbekannten unbestimmt lassen, so ist dasselbe mit den (11) der Fall.

Dieser Satz ergänzt die am Schlusse des Art. 18 aufgestellten Sätze.

21.

Da nun durch die Ermittelung der Unbekannten aus den (11) im Allgemeinen keine der (10) vollständig erfüllt wird, so kann man nach einer Relation zwischen den übrig bleibenden Fehlern fragen, und es zeigt sich leicht, dass eine solche vorhanden ist und darin besteht, dass die Summe der mit den bez. Gewichten multiplicirten Quadrate der übrig bleibenden Fehler ein Minimum wird. Denn stellt man diese Bedingung auf, nemlich

$$\begin{aligned} & p\,(ax + bx' + cx'' + \ldots - l)^2 \\ & + p'(a'x + b'x' + c'x'' + \ldots - l')^2 \\ & + p''(a''x + b''x' + c''x'' + \ldots - l'')^2 + \text{etc.} = \text{Minimum} \end{aligned}$$

und entwickelt sie, so bekommt man die Gleichungen (11) wieder, gleichwie sich im Art. 3 zeigte, dass die Summe der Quadrate der übrig bleibenden Fehler bei der Bestimmung Einer Unbekannten aus gleich guten Beobachtungen ein Minimum wird, wenn man das arithmetische Mittel aus allen Bestimmungen als den wahrscheinlichsten Werth der Unbekannten betrachtet.

Den obigen Satz, den man sonst voran zu stellen pflegt, haben wir hier aus dem zu Anfang dieser Abhandlung aufgestellten Grundsatz abgeleitet, um zu zeigen, dass er eine nothwendige Folge desselben ist.

22.

Zur vollständigen Auflösung der Aufgabe, die uns jetzt beschäftigt, gehört auch die Bestimmung der Gewichte der Unbekannten x, x', x'', etc. Da das Verfahren, durch welches diese Unbekannten im Vorhergehenden bestimmt worden sind, auf linearische Gleichungen geführt hat, so ist es klar, dass man jede derselben als linearische Function der bekannten Glieder (al), (bl), (cl), etc. der Gleichungen (11) darstellen kann, und da wiederum jedes dieser Glieder eine linearische Function der durch die Beobachtungen unabhängig von einander erhaltenen Grössen l, l', l'', etc. ist, so kann man auch die Unbekannten als linearische Functionen dieser letzt genannten Grössen darstellen. Seien daher

$$(13) \quad \ldots\ldots \quad \left\{ \begin{aligned} x &= \lambda l + \lambda' l' + \lambda'' l'' + \ldots \\ x' &= \varkappa l + \varkappa' l' + \varkappa'' l'' + \ldots \\ x'' &= \mu l + \mu' l' + \mu'' l'' + \ldots \end{aligned} \right.$$

u. s. w. dann sind λ, λ', etc., $\varkappa$, $\varkappa'$, etc., μ, μ', etc. bestimmte numerische Coefficienten, deren Werthe jedenfalls zufolge des Vorhergehenden ermittelt werden können. Bezeichnet man nun die Gewichte dieser Bestimmungen von x, x', x'', etc. mit P, P', P'', etc. so wird sogleich in Folge der Gleichung (8)

$$\frac{1}{P} = \frac{\lambda^2}{p} + \frac{\lambda'^2}{p'} + \frac{\lambda''^2}{p''} + \dots$$
$$\frac{1}{P'} = \frac{\varkappa^2}{p} + \frac{\varkappa'^2}{p'} + \frac{\varkappa''^2}{p''} + \dots$$
$$\frac{1}{P''} = \frac{\mu^2}{p} + \frac{\mu'^2}{p'} + \frac{\mu''^2}{p''} + \dots$$

u. s. w. Durch die unbestimmte Auflösung der Gleichungen (11) erhält man

$$\left.\begin{aligned} x &= (1,1)(al) + (1,2)(bl) + (1,3)(cl) + \dots \\ x' &= (1,2)(al) + (2,2)(bl) + (2,3)(cl) + \dots \\ x'' &= (1,3)(al) + (2,3)(bl) + (3,3)(cl) + \dots \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (14)$$

u. s. w. wo (1,1), (1,2), etc. bestimmte numerische Werthe haben. Substituirt man die Ausdrücke des Art. 19 für (al), (bl), etc. in die vorstehenden Gleichungen, so erhält man

$$\begin{aligned} x = &\{(1,1)pa + (1,2)pb + (1,3)pc + \dots\}l \\ &+ \{(1,1)p'a' + (1,2)p'b' + (1,3)p'c' + \dots\}l' \\ &+ \text{etc.} \\ x' = &\{(1,2)pa + (2,2)pb + (2,3)pc + \dots\}l \\ &+ \{(1,2)p'a' + (2,2)p'b' + (2,3)p'c' + \dots\}l' \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}$$

u. s. w. Vergleicht man diese mit den (13), so wird

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= (1,1)pa + (1,2)pb + (1,3)pc + \dots \\ \lambda' &= (1,1)p'a' + (1,2)p'b' + (1,3)p'c' + \dots \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (15)$$

$$\left.\begin{aligned} \varkappa &= (1,2)pa + (2,2)pb + (2,3)pc + \dots \\ \varkappa' &= (1,2)p'a' + (2,2)p'b' + (2,3)p'c' + \dots \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (16)$$

u. s. w. Multiplicirt man aber die ursprünglichen Gleichungen (10) der Reihe nach erst mit λ, λ', λ'', etc. und addirt, dann mit $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$, etc. und addirt, u. s. w., so ergiebt sich

$$(\lambda a)x + (\lambda b)x' + (\lambda c)x'' + \dots = (\lambda l)$$
$$(\varkappa a)x + (\varkappa b)x' + (\varkappa c)x'' + \dots = (\varkappa l)$$

u. s. w. wo

$$\begin{aligned}
(\lambda a) &= \lambda a + \lambda' a' + \lambda'' a'' + \ldots \\
(\lambda b) &= \lambda b + \lambda' b' + \lambda'' b'' + \ldots \\
&\vdots \\
(\lambda l) &= \lambda l + \lambda' l' + \lambda'' l'' + \ldots \\
\hline
(\varkappa a) &= \varkappa a + \varkappa' a' + \varkappa'' a'' + \ldots \\
(\varkappa b) &= \varkappa b + \varkappa' b' + \varkappa'' b'' + \ldots \\
&\vdots \\
(\varkappa l) &= \varkappa l + \varkappa' l' + \varkappa'' l'' + \ldots
\end{aligned}$$

u. s. w. Aber in Folge dieser Bezeichnung geben die Gleichungen (13)

$$x = (\lambda l), \quad x' = (\varkappa l), \quad x'' = (\mu l), \text{ etc.}$$

und folglich werden

$$(17) \quad \ldots \quad \begin{cases} (\lambda a) = 1, & (\lambda b) = 0, & (\lambda c) = 0 \\ (\varkappa a) = 0, & (\varkappa b) = 1, & (\varkappa c) = 0 \\ (\mu a) = 0, & (\mu b) = 0, & (\mu c) = 1 \end{cases}$$

u. s. w. Multiplicirt man hierauf die (15) der Reihe nach mit $\frac{\lambda}{p}$, $\frac{\lambda'}{p'}$, $\frac{\lambda''}{p''}$, etc. und addirt, so wird in Folge der vorstehenden Bedingungsgleichungen

$$\frac{\lambda^2}{p} + \frac{\lambda'^2}{p'} + \frac{\lambda''^2}{p''} + \ldots = (1,1)$$

die Gleichungen (16) geben auf ähnliche Art

$$\frac{\varkappa^2}{p} + \frac{\varkappa'^2}{p'} + \frac{\varkappa''^2}{p''} + \ldots = (2,2)$$

und auf dieselbe Weise bekommt man

$$\frac{\mu^2}{p} + \frac{\mu'^2}{p'} + \frac{\mu''^2}{p''} + \ldots = (3,3)$$

u. s. w. Es folgen hieraus für die Gewichte die folgenden einfachen Ausdrücke,

$$P = \frac{1}{(1,1)}, \quad P' = \frac{1}{(2,2)}, \quad P'' = \frac{1}{(3,3)}, \text{ etc.}$$

die auch wie folgt durch Worte beschrieben werden können. Um die Gewichte der Unbekannten x, x', x'', etc. zu erhalten, muss man die Gleichungen (11) unbestimmt auflösen, worauf das Reciproke des Coefficienten von (al) im Ausdruck von x, das Gewicht von x, das Reciproke des Coefficienten von (bl) im Ausdruck von x', das Gewicht von x', das Reciproke des Coefficienten von (cl) im Ausdruck von x'', das Gewicht von x'', u. s. w. ausdrückt. Das einfachste Verfahren um sowohl diese,

wie die übrigen Coefficienten der unbestimmten Elimination zu erhalten wird weiter unten angegeben werden.

23.

Da Fälle vorkommen können, in welchen nicht nur die Kenntniss von x, x', x'', etc., sondern auch die Kenntniss von Functionen derselben verlangt werden, so soll hier noch der wahrscheinlichste Werth einer linearischen Function dieser Grössen, nebst dem Gewicht dieser Bestimmung abgeleitet werden. Die Function sei die folgende,

$$K = k + \varepsilon x + \varepsilon' x' + \varepsilon'' x'' + \ldots$$

wo k, ε, ε', ε'', etc. gegebene numerische Grössen sind. Es ist nun ohne Weiteres klar, dass der wahrscheinlichste Werth von K durch die Substitution der im Vorhergehenden ermittelten wahrscheinlichsten Werthe von x, x', x'', etc. in den vorstehenden Ausdruck erhalten wird, und es wird sich daher hier nur um den Ausdruck des Gewichts dieser Bestimmung handeln können.

Eliminirt man x, x', x'', etc. im vorstehenden Ausdruck für K durch die Gleichungen (13), so wird

$$\begin{aligned} K = k &+ (\varepsilon\lambda + \varepsilon'\varkappa + \varepsilon''\mu + \ldots)l \\ &+ (\varepsilon\lambda' + \varepsilon'\varkappa' + \varepsilon''\mu' + \ldots)l' \\ &+ (\varepsilon\lambda'' + \varepsilon'\varkappa'' + \varepsilon''\mu'' + \ldots)l'' + \text{etc.} \quad . \quad . \quad (18) \end{aligned}$$

und da hier K durch die durch Beobachtungen erhaltenen Grössen l, l', l'', etc. ausgedrückt ist, so giebt die Gleichung (8) für das Gewicht von K, wenn wir es mit Q bezeichnen, sogleich den folgenden Ausdruck,

$$\begin{aligned} \frac{1}{Q} = &\frac{(\varepsilon\lambda + \varepsilon'\varkappa + \varepsilon''\mu + \ldots)^2}{p} \\ &+ \frac{(\varepsilon\lambda' + \varepsilon'\varkappa' + \varepsilon''\mu' + \ldots)^2}{p'} \\ &+ \frac{(\varepsilon\lambda'' + \varepsilon'\varkappa'' + \varepsilon''\mu'' + \ldots)^2}{p''} + \text{etc.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19) \end{aligned}$$

Multiplicirt man aber die Gleichungen (15) der Reihe nach mit $\frac{\varkappa}{p}$, $\frac{\varkappa'}{p'}$, $\frac{\varkappa''}{p''}$, etc. und addirt, so ergiebt sich in Folge der Bedingungsgleichungen (17) sogleich

$$\frac{\lambda\varkappa}{p} + \frac{\lambda'\varkappa'}{p'} + \frac{\lambda''\varkappa''}{p''} + \ldots = (1,2)$$

und auf dieselbe Weise bekommt man

$$\frac{\lambda\mu}{p} + \frac{\lambda'\mu'}{p'} + \frac{\lambda''\mu''}{p''} + \ldots = (1,3)$$

$$\frac{\varkappa\mu}{p} + \frac{\varkappa'\mu'}{p'} + \frac{\varkappa''\mu''}{p''} + \ldots = (2,3)$$

u. s. w. Durch Anwendung dieser Gleichungen auf den Ausdruck für $\frac{1}{Q}$ erhält man, nachdem die darin vorkommenden Quadrate entwickelt worden sind,

$$\begin{aligned}\frac{1}{Q} = \varepsilon^2(1,1) + 2\varepsilon\varepsilon'(1,2) + 2\varepsilon\varepsilon''(1,3) &+ \ldots \\ + \varepsilon'^2(2,2) + 2\varepsilon'\varepsilon''(2,3) &+ \ldots \\ + \varepsilon''^2(3,3) &+ \ldots \\ &+ \ldots\end{aligned}$$

womit die Aufgabe gelöst ist. Man erkennt leicht, dass die obigen Ausdrücke für die Gewichte P, P', P'', etc. specielle Fälle vom Vorstehenden sind, wie auch nicht anders sein kann.

24.

In Bezug auf die im Vorhergehenden abgeleiteten Ausdrücke für die Gewichte P, P', P'', etc. und Q sind noch ein Paar wichtige Bemerkungen zu machen. Die anfänglich erhaltenen Ausdrücke für diese Gewichte gelten nicht blos für den Fall, in welchem man die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten anwendet, sondern in jedem überhaupt möglichen Falle. Die Ausdrücke für x, x', x'', etc. können in jedem Falle auf die Form gebracht werden, die ihnen in den Gleichungen (13) gegeben worden ist, und wenn man nun blos die ursprünglichen Gleichungen (10) betrachtet, die die Unbekannten mit einander verbinden, so kann diesen auf unzählig viele Arten bis auf Weniges Gnüge geleistet werden. Jede verschiedene Art der Gnügeleistung derselben wird auf die Gleichungen (13) keine andere Wirkung äussern, als dass die darin enthaltenen Coefficienten λ, λ', etc. $\varkappa$, $\varkappa'$, etc. μ, μ', etc. andere Werthe annehmen, und folglich die Unbekannten selbst auch. Wie aber nun auch die Werthe der eben genannten Coefficienten sein mögen, die Ausdrücke der Gewichte, die Functionen derselben Coefficienten sind, behalten ihre volle Geltung, und geben jedes Mal das Gewicht der ausgeführten Bestimmung der Unbekannten, und dieses gilt nicht nur für die genannten Ausdrücke für P, P', etc. sondern auch für den Ausdruck für Q, der ausdrücklich Function der oben genannten Coefficienten λ, λ', etc. $\varkappa$, $\varkappa'$, etc. etc. ist.

Die Substitution derjenigen Werthe der eben genannten Coefficienten, die die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten geben, muss nun vor allen Substitutionen anderer Werthe derselben den Gewichten die Eigenschaft verleihen, dass sie Maxima werden. Denn gäbe es irgend andere Werthe dieser Coefficienten, die den Gewichten grössere Werthe verleihen könnten, so würden diese, und nicht jene die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten geben. Dass in der That die Werthe der genannten Coefficienten, die im Vorhergehenden als diejenigen ermittelt worden sind, die die Werthe der Unbekannten zu den wahrscheinlichsten machen, auch die Gewichte zu Maxima machen, soll jetzt bewiesen werden. Da P, P', etc. specielle Werthe von Q sind, so braucht der Beweis nur für Q durchgeführt zu werden.

25.

Denken wir uns jetzt unter den Coefficienten λ, λ', etc. $\varkappa$, $\varkappa'$, etc. μ, μ', etc. etc. der Gleichungen (13) nicht diejenigen, die durch das oben abgeleitete Verfahren erhalten worden sind, sondern solche, die irgend eine beliebige Combination der Gleichungen (10) gegeben hat, so wird der daraus entspringende Werth der Function K immer noch durch die Gleichung (18), und das Gewicht dieser Bestimmung durch die Gleichung (19) gegeben sein. Untersuchen wir hierauf, wie die oft genannten Coefficienten bestimmt werden müssen, wenn der Gleichung (19) die Bedingung untergelegt wird, dass Q ein Maximum werde. Sei

$$\Lambda = \varepsilon\lambda + \varepsilon'\varkappa + \varepsilon''\mu + \dots$$
$$\Lambda' = \varepsilon\lambda' + \varepsilon'\varkappa' + \varepsilon''\varkappa' + \dots$$
$$\Lambda'' = \varepsilon\lambda'' + \varepsilon'\varkappa'' + \varepsilon''\mu'' + \dots$$

u. s. w. dann muss

$$\frac{1}{Q} = \frac{\Lambda^2}{p} + \frac{\Lambda'^2}{p'} + \frac{\Lambda''^2}{p''} + \dots \qquad (20)$$

in Bezug auf die Functionen Λ, Λ', Λ'', etc. ein Minimum werden. Diese Functionen sind nicht von einander unabhängig, sondern unterliegen einer Anzahl von Bedingungen, die man leicht erhalten kann. Multiplicirt man die Gleichungen (10) der Reihe nach mit λ, λ', λ'', etc. und addirt, so bekommt man in Folge der (13)

$$a\lambda + a'\lambda' + a''\lambda'' + \dots = 1$$
$$b\lambda + b'\lambda' + b''\lambda'' + \dots = 0$$
$$c\lambda + c'\lambda' + c''\lambda'' + \dots = 0$$

u. s. w. Multiplicirt man ferner die (10) mit $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$, etc. und addirt, so ergiebt sich

$$a\varkappa + a'\varkappa' + a''\varkappa'' + \ldots = 0$$
$$b\varkappa + b'\varkappa' + b''\varkappa'' + \ldots = 1$$
$$c\varkappa + c'\varkappa' + c''\varkappa'' + \ldots = 0$$

u. s. w. und eben so bekommt man

$$a\mu + a'\mu' + a''\mu'' + \ldots = 0$$
$$b\mu + b'\mu' + b''\mu'' + \ldots = 0$$
$$c\mu + c'\mu' + c''\mu'' + \ldots = 1$$

u. s. w. Um diese Gleichungen zu Functionen der $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, etc. zu machen, multiplicire man die erste Gleichung einer jeden Gruppe der Reihe nach mit ε, ε', ε'', etc. und addire. Mit den zweiten, dritten, u. s. w. Gleichungen verfahre man eben so, worauf die folgenden erhalten werden

$$(21) \quad \ldots \quad \begin{cases} a\mathcal{A} + a'\mathcal{A}' + a''\mathcal{A}'' + \ldots = \varepsilon \\ b\mathcal{A} + b'\mathcal{A}' + b''\mathcal{A}'' + \ldots = \varepsilon' \\ c\mathcal{A} + c'\mathcal{A}' + c''\mathcal{A}'' + \ldots = \varepsilon'' \end{cases}$$

u. s. w. welche die Bedingungsgleichungen sind, auf die es hier ankommt.

26.

Um nun die Bedingungsgleichungen für das Minimum des Ausdrucks (20) zu erhalten müsste man erst durch die vorstehenden Gleichungen, deren Anzahl kleiner ist wie die der $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, etc., von der letzteren so viele wie möglich eliminiren. Allein es ist bekannt, dass man statt dessen die Bedingungsgleichungen, jede mit einem verschiedenen Factor multiplicirt, zur Function die ein Minimum werden soll addiren, und dann nach der Differentiation alle Differentiale von einander als unabhängig betrachten darf. Multiplicirt man daher die obigen Bedingungsgleichungen der Reihe nach mit den Factoren $-2A$, $-2B$, $-2C$, etc., und addirt sie zur rechten Seite des Ausdrucks (20), so wird

$$\begin{gathered} \frac{\mathcal{A}^2}{p} + \frac{\mathcal{A}'^2}{p'} + \frac{\mathcal{A}''^2}{p''} + \ldots \\ -2a\mathcal{A}A - 2a'\mathcal{A}'A - 2a''\mathcal{A}''A - \ldots \\ -2b\mathcal{A}B - 2b'\mathcal{A}'B - 2b''\mathcal{A}''B - \ldots \\ -2c\mathcal{A}C - 2c'\mathcal{A}'C - 2c''\mathcal{A}''C - \ldots \\ \text{etc.} \qquad \text{etc.} \end{gathered}$$

die Function, die ein absolutes Minimum werden muss. Differentiirt man, und setzt die Coefficienten eines jeden der Differentiale für sich gleich Null, so werden

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\mathfrak{A}}{p} - aA - bB - cC - \ldots = 0 \\ \frac{\mathfrak{A}'}{p'} - a'A - b'B - c'C - \ldots = 0 \\ \frac{\mathfrak{A}''}{p''} - a''A - b''B - c''C - \ldots = 0\end{array}\right\} \quad \ldots \quad (22)$$

u. s. w. die Bedingungsgleichungen des Maximums von Q. Eliminirt man nun mittelst der vorstehenden Gleichungen die $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, etc. aus den (21), so bekommt man

$$\left.\begin{array}{l}(aa)A + (ab)B + (ac)C + \ldots = \varepsilon \\ (ab)A + (bb)B + (bc)C + \ldots = \varepsilon' \\ (ac)A + (bc)B + (cc)C + \ldots = \varepsilon''\end{array}\right\} \quad \ldots \quad (23)$$

u. s. w. wo die Coefficienten (aa), (ab), etc. dieselben sind wie im Art. 19. Diese Gleichungen, deren Anzahl der der Factoren A, B, C, etc. gleich ist, dienen zur Bestimmung dieser letzteren. Durch Einführung der Functionen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, etc. in die (18) bekommt man

$$K = k + \mathfrak{A}l + \mathfrak{A}'l' + \mathfrak{A}''l'' + \ldots$$

und die Elimination der $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, etc. hieraus, vermittelst der Gleichungen (22), giebt

$$K = k + A(al) + B(bl) + C(cl) + \ldots \quad \ldots \quad (24)$$

wo wieder die Coefficienten (al), (bl), etc. dieselben sind wie im Art. 19. Hiemit ist unsere Aufgabe gelöst, und es ist nur noch die Bedeutung dieser Auflösung zu untersuchen.

27.

Löst man die (23) unbestimmt auf, so ergiebt sich

$$\begin{array}{l}A = (1,1)\varepsilon + (1,2)\varepsilon' + (1,3)\varepsilon'' + \ldots \\ B = (1,2)\varepsilon + (2,2)\varepsilon' + (2,3)\varepsilon'' + \ldots \\ C = (1,3)\varepsilon + (2,3)\varepsilon' + (3,3)\varepsilon'' + \ldots\end{array}$$

u. s. w. wo nothwendiger Weise die Coefficienten $(1,1)$, $(1,2)$, etc. dieselben sind wie in den Gleichungen (14), und eliminirt man hiemit A, B, etc. aus (24) so kommt

$$K = k + \{(1,1)(al) + (1,2)(bl) + (1,3)(cl) + \ldots\}\varepsilon$$
$$+ \{(1,2)(al) + (2,2)(bl) + (2,3)(cl) + \ldots\}\varepsilon'$$
$$+ \{(2,3)(al) + (2,3)(bl) + (3,3)(cl) + \ldots\}\varepsilon'' + \text{etc.}$$

Die Factoren von ε, ε', ε'', etc. sind zufolge der Gleichungen (14) die wahrscheinlichsten Werthe von x, x', x'', etc., und folglich ist der Ausdruck (24) von K mit dem, im Art. als den wahrscheinlichsten, Werth von K erkannten identisch.

Für die Grössen x, x', x'', etc. ergiebt sich dasselbe. Denn setzt man $k = 0$, $\varepsilon = 1$, $\varepsilon' = \varepsilon'' = \text{etc.} = 0$, so geht K in x über, setzt man $k = 0$, $\varepsilon = 0$, $\varepsilon' = 1$, $\varepsilon'' = \text{etc.} = 0$, so geht K in x' über, u. s. w. Führt man aber diese Substitution im vorstehenden Ausdruck von K aus, so bekommt man die durch die (14) ausgedrückten wahrscheinlichsten Werthe von x, x', x'', etc. wieder. Es ist also hiemit der Satz bewiesen:

»Die durch Anwendung der wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten, oder irgend welchen Functionen der Unbekannten sich ergebenden Gewichte dieser Bestimmungen sind Maxima, und jede andere Bestimmung derselben führt auf Gewichte die kleiner sind.«

§. 3. **Ausdehnung der bisher behandelten Aufgabe auf den Fall, in welchem die Unbekannten nicht von einander unabhängig sind.**

28.

Bisher ist angenommen worden, dass die Unbekannten x, x', x'', etc. von einander unabhängig seien, da aber Fälle vorkommen, wo dieses nicht der Fall ist, so soll jetzt angenommen werden, dass zufolge der Aufgabe, auf welche die Wahrscheinlichkeitsrechnung angewandt werden soll, zwischen den Unbekannten Eine oder mehrere Bedingungsgleichungen stattfinden. Es ist an sich klar, dass die Zahl dieser Bedingungsgleichungen kleiner sein muss wie die Zahl der Unbekannten, denn wären diese beiden Zahlen einander gleich, so würden die Unbekannten daraus ohne Zuziehung von Beobachtungen bestimmt werden können, und wäre die Zahl der Bedingungsgleichungen grösser wie die der Unbekannten, so könnten letztere gar nicht bestimmt werden. Seien nun in grösster Allgemeinheit die Bedingungsgleichungen

$$\psi(X, X', X'', \ldots) = 0$$
$$\chi(X, X', X'', \ldots) = 0$$

u. s. w. wo ψ, χ, etc. Functionszeichen sind, so verfahre man zuerst wie im Art. 18 gezeigt worden ist. Man setze wieder

$$X = \xi + x\,,\quad X' = \xi' + x'\,,\quad X'' = \xi'' + x'', \text{ etc.}$$

$$\psi(\xi, \xi', \xi'', \ldots) = f$$
$$\chi(\xi, \xi', \xi'', \ldots) = g$$
etc.

$$\left(\frac{d\psi}{d\xi}\right) = q\,,\quad \left(\frac{d\psi}{d\xi'}\right) = q'\,,\quad \left(\frac{d\psi}{d\xi''}\right) = q'', \text{ etc.}$$
$$\left(\frac{d\chi}{d\xi}\right) = r\,,\quad \left(\frac{d\chi}{d\xi'}\right) = r'\,,\quad \left(\frac{d\chi}{d\xi''}\right) = r'', \text{ etc.}$$

u. s. w. dann bekommt man die folgenden linearischen Gleichungen

$$0 = qx + q'x' + q''x'' + \ldots + f$$
$$0 = rx + r'x' + r''x'' + \ldots + g$$

u. s. w. Da diese Bedingungsgleichungen als solche betrachtet werden, die aus der Theorie der Aufgabe, die auf die Unbekannten x, x', x'', etc. hingeführt hat, entspringen, und von den Beobachtungen unabhängig sind, so müssen sie vollständig erfüllt werden, denn jedes System von Werthen der Unbekannten, welches diesen Gleichungen nicht vollständig genügt, ist gewiss falsch, und kann daher unmöglich das wahrscheinlichste sein.

Die Auflösung unserer Aufgabe, die sich zunächst darbietet, ist die folgende. Wenn q die Anzahl der Bedingungsgleichungen bezeichnet, so kann man aus denselben durch die Elimination eine Anzahl q der Unbekannten in Function der übrigen darstellen, eliminirt man nun durch diese Gleichungen aus den (10) diese q Unbekannten, dann sind die übrigen Unbekannten von einander unabhängig, und die gegenwärtige Aufgabe ist auf die des Art. 18 u. f. hingeführt. Der weitere Verlauf der Auflösung ist also mit der im vor. § ausgeführten identisch.

29.

Ich nehme zu dem Ende an, dass in den Gleichungen (10) ausser den dort angeführten Unbekannten x, x', x'', etc. auch die Unbekannten $x_{,}$, $x_{,,}$, etc. vorkommen, und dass die letzteren es sind, die sich zur Elimination durch die Bedingungsgleichungen eignen. Es ist nemlich an sich klar, dass nicht in allen Fällen beliebige Unbekannte durch die Bedingungsgleichungen eliminirt werden können. Die Gleichungen (10) sind also jetzt die folgenden,

$$(25) \quad . \quad \left\{ \begin{array}{l} ax + bx' + cx'' + \ldots + b_{,}x_{,} + c_{,}x_{,,} + \ldots = l \\ a'x + b'x' + c'x'' + \ldots + b'_{,}x_{,} + c'_{,}x_{,,} + \ldots = l' \\ a''x + b''x' + c''x'' + \ldots + b''_{,}x_{,} + c''_{,}x_{,,} + \ldots = l'' \end{array} \right.$$

u. s. w. Auf gleiche Weise schreibe ich die Bedingungsgleichungen hin, indem ich zur besseren Uebersicht eine dritte Gleichung, so wie eine dritte Unbekannte der zweiten Gattung hinzufüge,

$$\begin{array}{l} 0 = qx + q'x' + q''x'' + \ldots + q_{,}x_{,} + q_{,,}x_{,,} + q_{,,,}x_{,,,} + \ldots + f \\ 0 = rx + r'x' + r''x'' + \ldots + r_{,}x_{,} + r_{,,}x_{,,} + r_{,,,}x_{,,,} + \ldots + g \\ 0 = sx + s'x' + s''x'' + \ldots + s_{,}x_{,} + s_{,,}x_{,,} + s_{,,,}x_{,,,} + \ldots + h \end{array}$$

u. s. w. Um hieraus $x_{,}$, $x_{,,}$, $x_{,,,}$, etc., jede für sich, in Function der x, x', x'', etc. darzustellen lehrt der Augenschein, dass die folgenden Gleichungen aufgelöst werden müssen,

$$\begin{array}{ll} 0 = q_{,}\zeta + q_{,,}\zeta' + q_{,,,}\zeta'' + \ldots + f\,; & 0 = q_{,}\mu + q_{,,}\mu' + q_{,,,}\mu'' + \ldots + q \\ 0 = r_{,}\zeta + r_{,,}\zeta' + r_{,,,}\zeta'' + \ldots + g\,; & 0 = r_{,}\mu + r_{,,}\mu' + r_{,,,}\mu'' + \ldots + r \\ 0 = s_{,}\zeta + s_{,,}\zeta' + s_{,,,}\zeta'' + \ldots + h\,; & 0 = s_{,}\mu + s_{,,}\mu' + s_{,,,}\mu'' + \ldots + s \\ \qquad\qquad \text{etc.} & \qquad\qquad \text{etc.} \\ 0 = q_{,}\nu + q_{,,}\nu' + q_{,,,}\nu'' + \ldots + q'\,; & 0 = q_{,}\varrho + q_{,,}\varrho' + q_{,,,}\varrho'' + \ldots + q'' \\ 0 = r_{,}\nu + r_{,,}\nu' + r_{,,,}\nu'' + \ldots + r'\,; & 0 = r_{,}\varrho + r_{,,}\varrho' + r_{,,,}\varrho'' + \ldots + r'' \\ 0 = s_{,}\nu + s_{,,}\nu' + s_{,,,}\nu'' + \ldots + s'\,; & 0 = s_{,}\varrho + s_{,,}\varrho' + s_{,,,}\varrho'' + \ldots + s'' \\ \qquad\qquad \text{etc.} & \qquad\qquad \text{etc.} \end{array}$$

etc. in welchen allen die Coefficienten der Unbekannten immer dieselben sind. Hat man hieraus ζ, ζ', etc. μ, μ', etc. ν, ν', etc. ϱ, ϱ', etc. etc. ermittelt, so werden

$$(26) \quad . \quad . \quad . \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{,} = \zeta + \mu x + \nu x' + \varrho x'' + \ldots \\ x_{,,} = \zeta' + \mu' x + \nu' x' + \varrho' x'' + \ldots \\ x_{,,,} = \zeta'' + \mu'' x + \nu'' x' + \varrho'' x'' + \ldots \end{array} \right.$$

u. s. w. Setzt man nun

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{a} = a + b_{,}\mu + c_{,}\mu' + \ldots\,; & \mathfrak{a}' = a' + b'_{,}\mu + c'_{,}\mu' + \ldots \\ \mathfrak{b} = b + b_{,}\nu + c_{,}\nu' + \ldots\,; & \mathfrak{b}' = b' + b'_{,}\nu + c'_{,}\nu' + \ldots \\ \mathfrak{c} = c + b_{,}\varrho + c_{,}\varrho' + \ldots\,; & \mathfrak{c}' = c' + b'_{,}\varrho + c'_{,}\varrho' + \ldots \\ \vdots & \vdots \\ \mathfrak{n} = l - b_{,}\zeta - c_{,}\zeta' + \ldots\,; & \mathfrak{n}' = l' - b'_{,}\zeta - c'_{,}\zeta' + \ldots \\ \mathfrak{a}'' = a'' + b''_{,}\mu + c''_{,}\mu' + & \\ \mathfrak{b}'' = b'' + b''_{,}\nu + c''_{,}\nu' + & \\ \mathfrak{c}'' = c'' + b''_{,}\varrho + c''_{,}\varrho' + & \qquad \text{etc.} \\ \vdots & \\ \mathfrak{n}'' = l'' - b''_{,}\zeta - c''_{,}\zeta' + & \end{array}$$

dann gehen die (25) in die folgenden über, in welchen alle Unbekannten von einander unabhängig sind

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{a}x + \mathfrak{b}x' + \mathfrak{c}x'' + \ldots &= \mathfrak{n} \\ \mathfrak{a}'x + \mathfrak{b}'x' + \mathfrak{c}'x'' + \ldots &= \mathfrak{n}' \\ \mathfrak{a}''x + \mathfrak{b}''x' + \mathfrak{c}''x'' + \ldots &= \mathfrak{n}'' \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (27)$$

u. s. w. Diese Gleichungen müssen also demselben Verfahren unterworfen werden wie die (10), und die der (11) analogen, die daraus hervorgehen, geben die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten x, x', x'', etc. Man muss nemlich zuerst die folgenden Coefficienten bilden

$$\begin{aligned} (\mathfrak{a}\mathfrak{a}) &= p\mathfrak{a}^2 + p'\mathfrak{a}'^2 + p''\mathfrak{a}''^2 + \ldots \\ (\mathfrak{a}\mathfrak{b}) &= p\mathfrak{a}\mathfrak{b} + p'\mathfrak{a}'\mathfrak{b}' + p''\mathfrak{a}''\mathfrak{b}'' + \ldots \\ &\vdots \\ (\mathfrak{a}\mathfrak{n}) &= p\mathfrak{a}\mathfrak{n} + p'\mathfrak{a}'\mathfrak{n}' + p''\mathfrak{a}''\mathfrak{n}'' + \ldots \\ \hline (\mathfrak{b}\mathfrak{b}) &= p\mathfrak{b}^2 + p'\mathfrak{b}'^2 + p''\mathfrak{b}''^2 + \ldots \\ &\vdots \\ (\mathfrak{b}\mathfrak{n}) &= p\mathfrak{b}\mathfrak{n} + p'\mathfrak{b}'\mathfrak{n}' + p''\mathfrak{b}''\mathfrak{n}'' + \ldots \\ \hline \end{aligned}$$

u. s. w. wenn wieder p, p', p'', etc. die Gewichte der Bestimmungen von l, l', l'', etc. bezeichnen. Sind die vorstehenden Grössen berechnet, so ergeben sich durch die Auflösung der folgenden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} (\mathfrak{a}\mathfrak{a})x + (\mathfrak{a}\mathfrak{b})x' + (\mathfrak{a}\mathfrak{c})x'' + \ldots &= (\mathfrak{a}\mathfrak{n}) \\ (\mathfrak{a}\mathfrak{b})x + (\mathfrak{b}\mathfrak{b})x' + (\mathfrak{b}\mathfrak{c})x'' + \ldots &= (\mathfrak{b}\mathfrak{n}) \\ (\mathfrak{a}\mathfrak{c})x + (\mathfrak{b}\mathfrak{c})x' + (\mathfrak{c}\mathfrak{c})x'' + \ldots &= (\mathfrak{c}\mathfrak{n}) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (28)$$

u. s. w. die wahrscheinlichsten Werthe von x, x', x'', etc. und substituirt man die für diese erhaltenen Werthe in die (26), so ergeben sich die wahrscheinlichsten Werthe von $x_{,}$, $x_{,,}$, $x_{,,,}$, etc., womit alle Unbekannten erhalten sind.

30.

Die Gewichte dieser Bestimmungen von x, x', x'', etc. haben dieselben Ausdrücke wie in der vorhergehenden Aufgabe, da die Analyse des Art. 22, nachdem a, b, etc. l, a', etc. in $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, etc. $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{a}'$, etc. verwandelt worden sind, ohne Abänderung wieder stattfindet. Sei also durch die unbestimmte Auflösung der Gleichungen (28)

$$x = (I,\ I)(\mathfrak{an}) + (I,\ II)(\mathfrak{bn}) + (I,\ III)(\mathfrak{cn}) + \ldots$$
$$x' = (I,\ II)(\mathfrak{an}) + (II,\ II)(\mathfrak{bn}) + (II,\ III)(\mathfrak{cn}) + \ldots$$
$$x'' = (I, III)(\mathfrak{an}) + (II, III)(\mathfrak{bn}) + (III, III)(\mathfrak{cn}) + \ldots$$

u. s. w. erhalten worden, dann wird

$$P = \frac{1}{(I,\ I)}\ ;\quad P' = \frac{1}{(II,\ II)}\ ;\quad P'' = \frac{1}{(III,\ III)}\ ;\ \text{etc.}$$

wenn wieder P, P', etc. die Gewichte der vorstehenden Bestimmungen von x, x', etc. bezeichnen. Da die $x_{,}$, $x_{,,}$, etc. zu Functionen der x, x', etc. gemacht worden sind, so werden ihre Gewichte eben so bestimmt, wie das der Function K des Art. 23, und der dort für dieses Gewicht erhaltene Ausdruck giebt nach Abänderung der Bezeichnungen die Gewichte der obigen Bestimmungen von $x_{,}$, $x_{,,}$, etc. Bezeichnet man diese Gewichte mit $P_{,}$, $P_{,,}$, etc., so ergiebt sich sogleich

$$\begin{aligned}\frac{1}{P_{,}} = \mu^2(I,I) &+ 2\mu\nu\,(I,\ II) + 2\mu\varrho\,(I,\ III) + \ldots\\ &+ \nu^2(II,II) + 2\nu\varrho\,(II, III) + \ldots\\ &+ \varrho^2\,(III,\ III) + \ldots\\ &+ \ldots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{P_{,,}} = \mu'^2(I,I) &+ 2\mu'\nu'(I,II) + 2\mu'\varrho'(I,\ III) + \ldots\\ &+ \nu'^2(II,II) + 2\nu'\varrho'(II, III) + \ldots\\ &+ \varrho'^2\,(III,\ III) + \ldots\\ &+ \ldots\end{aligned}$$

u. s. w. womit die Gewichte aller Unbekannten bestimmt sind.

31.

Von der eben gelösten Aufgabe lässt sich eine andere Auflösung geben, die auf elegante Relationen führt, aber statt genau dieselbe Aufgabe wieder vorzunehmen, will ich die folgende etwas allgemeinere aufstellen *).

Allgemeine Aufgabe.

Seien wie früher

$$\psi\,(X,\ X',\ X'', \ldots) = 0$$
$$\chi\,(X,\ X',\ X'', \ldots) = 0$$
$$\text{etc.}$$

*) S. Schum. Astr. Nachr. Bd. XVI. No. 361.

eine Anzahl von Gleichungen, die, durch irgend eine Theorie gegeben, zwischen den Unbekannten X, X', X'', etc. stattfinden, deren Anzahl aber kleiner ist wie die der Unbekannten, so dass letztere dadurch nicht völlig bestimmt sind. Es wird nun angenommen, dass es möglich wird alle Unbekannten zu bestimmen, wenn man die Werthe L, L', etc. gewisser Functionen

$$\begin{aligned} f\,(X, X', X'', \ldots) &= L \\ F\,(X, X', X'', \ldots) &= L' \\ \text{etc.} \end{aligned}$$

durch Beobachtungen ermittelt, und man fragt in dem Falle, wo die Anzahl aller Functionen ψ, χ, etc. f, F, etc. grösser, oder wenigstens nicht kleiner ist wie die Anzahl der Unbekannten, nicht nur nach den wahrscheinlichsten Werthen dieser, und den Gewichten dieser Bestimmungen, sondern auch nach dem wahrscheinlichsten Werthe irgend einer Function Ω derselben Unbekannten und dem Gewicht dieser Bestimmung.

Auflösung.

Die Functionen bereitet man, wenn sie nicht ursprünglich linearisch sind, alle auf dieselbe Weise vor, wie in den Artt. 18 u. 28 gezeigt worden ist. Die dort eingeführten Bezeichnungen sollen hier beibehalten werden. In Bezug auf die Function Ω sei

$$\Omega\,(X, X', X'', \ldots) = \omega$$

$$\left(\frac{d\Omega}{dX}\right) = k, \quad \left(\frac{d\Omega}{dX'}\right) = k', \quad \left(\frac{d\Omega}{dX''}\right) = k'', \quad \text{etc.}$$

und somit beruht die Aufgabe auf die Behandlung der folgenden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} ax + bx' + cx'' + \ldots &= l \\ a'x + b'x' + c'x'' + \ldots &= l' \\ a''x + b''x' + c''x'' + \ldots &= l'' \\ \text{etc.} \qquad & \text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (29)$$

$$\left.\begin{aligned} qx + q'x' + q''x'' + \ldots + f &= 0 \\ rx + r'x' + r''x'' + \ldots + g &= 0 \\ sx + s'x' + s''x'' + \ldots + h &= 0 \\ \text{etc.} \qquad & \text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (30)$$

$$\Omega = \omega + kx + k'x' + k''x'' + \ldots \quad \ldots \quad (31)$$

Die Anzahl der Gleichungen (29) sei m, die Anzahl der (30) sei q, und die der Unbekannten x, x', x'', etc. sei n. Es ist nun hier Bedingung, dass

$$q < n\,, \quad m + q > n$$

oder wenigstens nicht $m + q < n$ sei. Es folgt hieraus aber nicht, dass nothwendig $m > n$ sein muss, wenn gleich dieser Fall eintreten kann, in Bezug auf m und n sind vielmehr alle drei Fälle

$$m < n\,, \quad m = n\,, \quad m > n$$

möglich.

32.

Wie man nun auch die x, x', x'', etc. aus den obigen Gleichungen bestimmen mag, die Ausdrücke derselben können wieder nur linearische Functionen von l, l', l'', etc. f, g, h, etc. sein, und sie haben daher die folgende Form

$$(32) \cdot \begin{cases} x = \zeta l + \zeta' l' + \zeta'' l'' + \ldots - \varphi f - \chi g - \psi h - \ldots \\ x' = \theta l + \theta' l' + \theta'' l'' + \ldots - \varphi' f - \chi' g - \psi' h - \ldots \\ x'' = \varrho l + \varrho' l' + \varrho'' l'' + \ldots - \varphi'' f - \chi'' g - \psi'' h - \ldots \end{cases}$$

u. s. w. wo ζ, ζ', etc. θ, θ', etc. ϱ, ϱ', etc. φ, φ', etc. χ, χ', etc. ψ, ψ', etc. numerische, jetzt noch unbekannte, Coefficienten sind. Die Anzahl dieser Gleichungen ist $= n$, und die Anzahl der eben genannten unbekannten Coefficienten ist $= n(m + q)$, aber diese Unbekannten sind nicht völlig von einander unabhängig, sondern hängen durch eine Anzahl $= n^2$ von Gleichungen gegenseitig von einander ab, so dass in der That nur eine Anzahl $= n(m + q - n)$ dieser Unbekannten von einander unabhängig sind. Um die Gleichungen, die zwischen diesen Unbekannten stattfinden, zu erhalten, multiplicire man die Gleichungen (29) der Reihe nach mit ζ, ζ', ζ'', etc. die (30) mit φ, χ, ψ, etc., und addire die Produkte, worauf die Vergleichung mit der ersten (32) die folgenden Gleichungen giebt,

$$\begin{aligned} \zeta a + \zeta' a' + \zeta'' a'' + \ldots + \varphi q + \chi r + \psi s + \ldots &= 1 \\ \zeta b + \zeta' b' + \zeta'' b'' + \ldots + \varphi q' + \chi r' + \psi s' + \ldots &= 0 \\ \zeta c + \zeta' c' + \zeta'' c'' + \ldots + \varphi q'' + \chi r'' + \psi s'' + \ldots &= 0 \end{aligned}$$

u. s. w. Multiplicirt man hierauf dieselben Gleichungen der Reihe nach mit θ, θ', θ'', etc. und φ', χ', ψ', etc. und addirt, so giebt die Vergleichung mit der zweiten (32)

$$\theta a + \theta' a' + \theta'' a'' + \ldots + \varphi' q + \chi' r + \psi' s + \ldots = 0$$
$$\theta b + \theta' b' + \theta'' b'' + \ldots + \varphi' q' + \chi' r' + \psi' s' + \ldots = 1$$
$$\theta c + \theta' c' + \theta'' c'' + \ldots + \varphi' q'' + \chi' r'' + \psi' s'' + \ldots = 0$$

u. s. w. und eben so ergiebt sich

$$\varrho a + \varrho' a' + \varrho'' a'' + \ldots + \varphi'' q + \chi'' r + \psi'' s + \ldots = 0$$
$$\varrho b + \varrho' b' + \varrho'' b'' + \ldots + \varphi'' q' + \chi'' r' + \psi'' s' + \ldots = 0$$
$$\varrho c + \varrho' c' + \varrho'' c'' + \ldots + \varphi'' q'' + \chi'' r'' + \psi'' s'' + \ldots = 1$$

u. s. w. u. s. w. Man erkennt leicht, dass die Anzahl aller dieser Gleichungen $= n^2$ ist, wie oben angeführt wurde.

33.

Wie man nun auch die Unbekannten x, x', etc. bestimmen mag, so folgt aus der (31), nachdem man x, x', etc. durch die (32) eliminirt hat, dass

$$\Omega = \omega + \Lambda l + \Lambda' l' + \Lambda'' l'' + \ldots - \alpha f - \beta g - \gamma h - \ldots \quad (33)$$

wird, wenn man

$$\left.\begin{aligned} \Lambda &= k\zeta + k'\theta + k''\varrho + \ldots \\ \Lambda' &= k\zeta' + k'\theta' + k''\varrho' + \ldots \\ \Lambda'' &= k\zeta'' + k'\theta'' + k''\varrho'' + \ldots \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= k\varphi + k'\varphi' + k''\varphi'' + \ldots \\ \beta &= k\chi + k'\chi' + k''\chi'' + \ldots \\ \gamma &= k\psi + k'\psi' + k''\psi'' + \ldots \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

setzt, und wenn man das Gewicht dieser Bestimmung von Ω mit P bezeichnet, so wird zufolge der Gleichung (8)

$$\frac{1}{P} = \frac{\Lambda^2}{p} + \frac{\Lambda'^2}{p'} + \frac{\Lambda''^2}{p''} + \ldots \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

wenn wieder p, p', p'', etc. die Gewichte der Bestimmungen von l, l', l'', etc. bezeichnen.

Wir wollen jetzt zur Lösung unserer Aufgabe den im Art. 27 bewiesenen Satz anwenden, zufolge dessen durch die wahrscheinlichste Bestimmung der Unbekannten die Gewichte Maxima werden. Es muss demzufolge die rechte Seite der Gleichung (36) zu einem Minimum gemacht werden, und dieses wird wieder ein sogenanntes relatives Minimum, da die Λ, Λ', Λ'', etc. nicht von einander unabhängig sind. Die

Bedingungsgleichungen zwischen den eben genannten Grössen erhält man aus den im vor. Art. erhaltenen Gleichungen, eben so wie am eben a. O. Man multiplicire die erste Gleichung einer jeden Gruppe dieser Gleichungen der Reihe nach mit k, k', k'', etc, und addire, und behandle die übrigen Gleichungen eben so, dann ergeben sich

$$(37)\quad \begin{cases} \Delta a + \Delta' a' + \Delta'' a'' + \ldots + \alpha q + \beta r + \gamma s + \ldots = k \\ \Delta b + \Delta' b' + \Delta'' b'' + \ldots + \alpha q' + \beta r' + \gamma s' + \ldots = k' \\ \Delta c + \Delta' c' + \Delta'' c'' + \ldots + \alpha q'' + \beta r'' + \gamma s'' + \ldots = k'' \end{cases}$$

u. s. w. welche die gesuchten Bedingungsgleichungen sind. Multiplicirt man nun diese Gleichungen mit den unbestimmten Factoren $-2A$, $-2B$, $-2C$, etc. und addirt sie zur rechten Seite der Gleichung (36), so wird der Ausdruck, welcher ein absolutes Minimum werden muss, der folgende

$$\begin{array}{l} \frac{\Delta^2}{p} - 2A\Delta a - 2B\Delta b - 2C\Delta c - \ldots \\ + \frac{\Delta'^2}{p'} - 2A\Delta' a' - 2B\Delta' b' - 2C\Delta' c' - \ldots \\ + \frac{\Delta''^2}{p''} - 2A\Delta'' a'' - 2B\Delta'' b'' - 2C\Delta'' c'' - \ldots \\ \quad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \\ - 2A\alpha q - 2B\alpha q' - 2C\alpha q'' - \ldots \\ - 2A\beta r - 2B\beta r' - 2C\beta r'' - \ldots \\ - 2A\gamma s - 2B\gamma s' - 2C\gamma s'' - \ldots \\ \quad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \\ + 2Ak + 2Bk' + 2Ck'' + \ldots \end{array}$$

Differentiirt man diesen nach $\Delta, \Delta', \Delta''$, etc. α, β, γ, etc. und betrachtet darauf die Differentiale aller dieser Veränderlichen als unabhängig von einander, so bekommt man die Gleichungen

$$(38)\quad \ldots \quad \begin{cases} \frac{\Delta}{p} = Aa + Bb + Cc + \ldots \\ \frac{\Delta'}{p'} = Aa' + Bb' + Cc' + \ldots \\ \frac{\Delta''}{p''} = Aa'' + Bb'' + Cc'' + \ldots \\ \quad \text{etc.} \qquad \text{etc.} \end{cases}$$

$$(39)\quad \ldots \quad \begin{cases} 0 = Aq + Bq' + Cq'' + \ldots \\ 0 = Ar + Br' + Cr'' + \ldots \\ 0 = As + Bs' + Cs'' + \ldots \\ \quad \text{etc.} \qquad \text{etc.} \end{cases}$$

die in Verbindung mit den (37) die Auflösung der Aufgabe in sich enthalten. Diese ist durch die Zuziehung der Bedingung des Maximums von P wieder eine bestimmte geworden, denn die Zahl der aufzulösenden Gleichungen ist der Zahl der darin befindlichen Unbekannten gleich. Die Zahl der $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, etc. ist $= m$, die der A, B, etc. $= n$, und die der α, β, etc. $= q$, folglich ist die Zahl aller Unbekannten $= m + n + q$. Die Anzahl der Gleichungen (37) ist $= n$, die der (38) $= m$, und die der (39) $= q$, folglich ist die Anzahl aller Gleichungen auch $= n + m + q$.

34.

Die Unbekannten $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, etc. können wieder sogleich eliminirt werden. Zieht man die Werthe derselben aus (38), und substituirt sie in die (37), so erhält man

$$\begin{aligned}
[aa]A + [ab]B + [ac]C + \ldots &= k - \alpha q - \beta r - \gamma s - \ldots \\
[ab]A + [bb]B + [bc]C + \ldots &= k' - \alpha q' - \beta r' - \gamma s' - \ldots \\
[ac]A + [bc]B + [cc]C + \ldots &= k'' - \alpha q'' - \beta r'' - \gamma s'' - \ldots
\end{aligned}$$

u. s. w. worin

$$\begin{aligned}
[aa] &= pa^2 + p'a'^2 + p''a''^2 + \ldots \\
[ab] &= pab + p'a'b' + p''a''b'' + \ldots \\
[ac] &= pac + p'a'c' + p''a''c'' + \ldots \\
&\text{etc.} \qquad \text{etc.} \\
[bb] &= pb^2 + p'b'^2 + p''b''^2 + \ldots \\
[bc] &= pbc + p'b'c' + p''b''c'' + \ldots \\
&\text{etc.} \qquad \text{etc.} \\
[cc] &= pc^2 + p'c'^2 + p''c''^2 + \ldots \\
&\text{etc.} \qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

gesetzt sind. Es ist nun für den ferneren Verlauf der Auflösung von Vortheil die eben erhaltenen Gleichungen dergestalt in zwei Theile zu zerlegen, dass der eine Theil

$$[aa]A' + [ab]B' + [ac]C' + \ldots = k$$

u. s. w. wird, aber ohne angemessene Abänderung der Coefficienten dieser Gleichungen ist dieses nicht immer möglich. Die Anzahl der Unbekannten A', B', C', etc. ist freilich immer der der Gleichungen gleich, und somit scheint es als könnten diese Unbekannten immer aus diesen Gleichungen bestimmt werden, von welchen ich die erste hier angesetzt

habe. Es ist aber zu bemerken, dass diese Gleichungen aus den einzigen (29) hervor gehen, deren Anzahl m ist, während die Anzahl der A', B', etc. $= n$ ist. In allen Fällen nun, wo $m = n$ oder $m > n$ ist, ist die Bestimmung der A', B', etc. aus den obigen Gleichungen zwar möglich, aber in den Fällen in welchen $m < n$ ist, trifft dieses nicht mehr ein, denn alsdann sind nothwendiger Weise $n - m$ dieser Gleichungen in den übrigen enthalten.

Man kann demohngeachtet die in Rede stehenden Gleichungen so vorbereiten, dass sie in jedem Falle alle wesentlich von einander verschieden werden, und zwar kann dieses durch angemessene Zuziehung der Gleichungen (39) bewirkt werden. Aus diesen bekommt man leicht

$$\begin{aligned}0 &= [qq]A + [qq']B + [qq'']C + \ldots\\0 &= [qq']A + [q'q']B + [q'q'']C + \ldots\\0 &= [qq'']A + [q'q'']B + [q''q'']C + \ldots\end{aligned}$$

u. s. w. wenn man

$$\begin{aligned}[qq] &= q^2 + r^2 + s^2 + \ldots\\[qq'] &= qq' + rr' + ss' + \ldots\\[qq''] &= qq'' + rr'' + ss'' + \ldots\\ &\text{etc.} \qquad \text{etc.}\\[q'q'] &= q'^2 + r'^2 + s'^2 + \ldots\\[q'q''] &= q'q'' + r'r'' + s's'' + \ldots\\ &\text{etc.} \qquad \text{etc.}\\[q''q''] &= q''^2 + r''^2 + s''^2 + \ldots\end{aligned}$$

u. s. w. setzt. Macht man nun

$$\begin{aligned}(aa) &= [aa] + [qq]\\(ab) &= [ab] + [qq']\\(ac) &= [ac] + [qq'']\\ &\text{etc.}\\(bb) &= [bb] + [q'q']\\(bc) &= [bc] + [q'q'']\\ &\text{etc.}\\(cc) &= [cc] + [q''q'']\end{aligned}$$

u. s. w. so wird auch

$$\begin{aligned}(aa)A + (ab)B + (ac)C + \ldots &= k - \alpha q - \beta r - \gamma s - \ldots\\(ab)A + (bb)B + (bc)C + \ldots &= k' - \alpha q' - \beta r' - \gamma s' - \ldots\\(ac)A + (bc)B + (cc)C + \ldots &= k'' - \alpha q'' - \beta r'' - \gamma s'' - \ldots\end{aligned}$$

u. s. w. aus welchen man immer, auch nachdem die mit α, β, γ, etc. multiplicirten Glieder abgeschnitten worden sind, die übrigen Unbekannten bestimmen kann. Ja es ist, um die Möglichkeit dieser Bestimmung herbei zu führen, nicht einmal nöthig alle Gleichungen (39) auf die eben erklärte Art mit den obigen Gleichungen zu verbinden, sondern die Anwendung einer Anzahl von $n-m$ der Gleichungen (39), die man beliebig unter diesen auswählen kann, reicht schon dazu aus.

35.

Setzt man jetzt

$$\left.\begin{aligned}(aa)A' + (ab)B' + (ac)C' + \ldots &= k\\ (ab)A' + (bb)B' + (bc)C' + \ldots &= k'\\ (ac)A' + (bc)B' + (cc)C' + \ldots &= k''\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

u. s. w. und löst diese unbestimmt auf, so wird man erhalten

$$\left.\begin{aligned}A' &= (1,1)k + (1,2)k' + (1,3)k'' + \ldots\\ B' &= (1,2)k + (2,2)k' + (2,3)k'' + \ldots\\ C' &= (1,3)k + (2,3)k' + (3,3)k'' + \ldots\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (41)$$

u. s. w. und hieraus ergiebt sich in Folge der Gleichungen des vor. Art.

$$\left.\begin{aligned}A &= A' - (\alpha\eta)\alpha - (\alpha\varkappa)\beta - (\alpha\lambda)\gamma - \ldots\\ B &= B' - (\beta\eta)\alpha - (\beta\varkappa)\beta - (\beta\lambda)\gamma - \ldots\\ C &= C' - (\gamma\eta)\alpha - (\gamma\varkappa)\beta - (\gamma\lambda)\gamma - \ldots\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (42)$$

u. s. w. nachdem zur Abkürzung

$$\begin{aligned}(\alpha\eta) &= (1,1)q + (1,2)q' + (1,3)q'' + \ldots\\ (\alpha\varkappa) &= (1,1)r + (1,2)r' + (1,3)r'' + \ldots\\ (\alpha\lambda) &= (1,1)s + (1,2)s' + (1,3)s'' + \ldots\\ &\text{etc.}\\ (\beta\eta) &= (1,2)q + (2,2)q' + (2,3)q'' + \ldots\\ (\beta\varkappa) &= (1,2)r + (2,2)r' + (2,3)r'' + \ldots\\ (\beta\lambda) &= (1,2)s + (2,2)s' + (2,3)s'' + \ldots\\ &\text{etc.}\\ (\gamma\eta) &= (1,3)q + (2,3)q' + (3,3)q'' + \ldots\\ (\gamma\varkappa) &= (1,3)r + (2,3)r' + (3,3)r'' + \ldots\\ (\gamma\lambda) &= (1,3)s + (2,3)s' + (3,3)s'' + \ldots\end{aligned}$$

u. s. w. gesetzt worden ist. Multiplicirt man nun die (42) der Reihe nach erst mit q, q', q'', etc. dann mit r, r', r'', etc. dann mit s, s', s'', etc. etc.

und addirt jedes Mal, so ergeben sich in Folge der Gleichungen (39) und (41) die folgenden

$$(43)\quad\ldots\quad\begin{cases}(\eta\eta)\alpha+(\eta\varkappa)\beta+(\eta\lambda)\gamma+\ldots=(\eta M)\\(\eta\varkappa)\alpha+(\varkappa\varkappa)\beta+(\varkappa\lambda)\gamma+\ldots=(\varkappa M)\\(\eta\lambda)\alpha+(\varkappa\lambda)\beta+(\lambda\lambda)\gamma+\ldots=(\lambda M)\end{cases}$$

u. s. w. wo

$$\begin{aligned}(\eta\eta)&=(\alpha\eta)q+(\beta\eta)q'+(\gamma\eta)q''+\ldots\\(\eta\varkappa)&=(\alpha\varkappa)q+(\beta\varkappa)q'+(\gamma\varkappa)q''+\ldots\\&=(\alpha\eta)r+(\beta\eta)r'+(\gamma\eta)r''+\ldots\\(\eta\lambda)&=(\alpha\lambda)q+(\beta\lambda)q'+(\gamma\lambda)q''+\ldots\\&=(\alpha\eta)s+(\beta\eta)s'+(\gamma\eta)s''+\ldots\\&\text{etc.}\\(\eta M)&=(\alpha\eta)k+(\beta\eta)k'+(\gamma\varkappa)k''+\ldots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\varkappa\varkappa)&=(\alpha\varkappa)r+(\beta\varkappa)r'+(\gamma\varkappa)r''+\ldots\\(\varkappa\lambda)&=(\alpha\lambda)r+(\beta\lambda)r'+(\gamma\lambda)r''+\ldots\\&=(\alpha\varkappa)s+(\beta\varkappa)s'+(\gamma\varkappa)s''+\ldots\\&\text{etc.}\\(\varkappa M)&=(\alpha\varkappa)k+(\beta\varkappa)k'+(\gamma\varkappa)k''+\ldots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\lambda\lambda)&=(\alpha\lambda)s+(\beta\lambda)s'+(\gamma\lambda)s''+\ldots\\&\text{etc.}\\(\lambda M)&=(\alpha\lambda)k+(\beta\lambda)k'+(\gamma\lambda)k''+\ldots\end{aligned}$$

u. s. w. Durch die Auflösung der Gleichungen (43) bekommt man nun immer die Werthe der Unbekannten α, β, γ, etc., und substituirt man diese nebst den Werthen von A', B', C', etc. in die (42), so ergeben sich auch die A, B, C, etc. durch bekannte Grössen ausgedrückt. Geht man hierauf zur Gleichung (33) zurück, und substituirt in diese die aus den (38) zu entnehmenden Werthe von $\varDelta$, $\varDelta'$, $\varDelta''$, etc. so bekommt man, nachdem

$$\begin{aligned}(al)&=pal+p'a'l'+p''a''l''+\ldots\\(bl)&=pbl+p'b'l'+p''b''l''+\ldots\\(cl)&=pcl+p'c'l'+p'c''l''+\ldots\end{aligned}$$

u. s. w. gesetzt worden sind,

$$\begin{aligned}\Omega=\omega&+A(al)+B(bl)+C(cl)+\ldots\\&-\alpha f-\beta g-\gamma h-\ldots\end{aligned}$$

welches der wahrscheinlichste Werth von Ω ist. Multiplicirt man ferner die Gleichungen (38)mit A, A', A'', und addirt, so wird in Folge der Gleichungen (37), (39), (36) das Gewicht dieser Bestimmung

$$P = \frac{1}{Ak + Bk' + Ck'' + \ldots}$$

Hiemit ist unsere Aufgabe schon vollständig gelöst, denn nicht nur der wahrscheinlichste Werth von Ω und das Gewicht dieser Bestimmung, sondern auch die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten x, x', x'', etc. nebst ihren Gewichten sind durch die im Vorhergehenden abgeleiteten Ausdrücke gegeben, wie man weiter unten sehen wird.

36.

Man kann in Bezug auf die eben erhaltenen Ausdrücke für Ω und P noch einen Schritt weiter gehen. Eliminirt man die A, B, C, etc. durch die Gleichungen (42), und setzt

$$\begin{aligned} F &= f + (\alpha\eta)(al) + (\beta\eta)(bl) + (\gamma\eta)(cl) + \ldots \\ G &= g + (\alpha\varkappa)(al) + (\beta\varkappa)(bl) + (\gamma\varkappa)(cl) + \ldots \\ H &= h + (\alpha\lambda)(al) + (\beta\lambda)(bl) + (\gamma\lambda)(cl) + \ldots \end{aligned}$$

u. s. w. und hierauf

$$\begin{aligned} Y &= A'(al) + B'(bl) + C'(cl) + \ldots \\ Z &= F\alpha + G\beta + H\gamma + \ldots \end{aligned}$$

so wird

$$\Omega = \omega + Y - Z$$

Setzt man ferner

$$\begin{aligned} R &= A'k + B'k' + C'k'' + \ldots \\ S &= \alpha(\eta M) + \beta(\varkappa M) + \gamma(\lambda M) + \ldots \end{aligned}$$

so ergiebt sich

$$P = \frac{1}{R - S}$$

Für Z lässt sich noch ein anderer Ausdruck geben, der wenigstens in dem Falle, wo man die Gewichte entweder gar nicht oder doch nur wenige derselben kennen lernen will, auf eine einfachere Rechnung führt. Durch die unbestimmte Auflösung der Gleichungen (43) habe man erhalten

$$\alpha = \{1,1\}(\eta M) + \{1,2\}(\varkappa M) + \{1,3\}(\lambda M) + \ldots$$
$$\beta = \{1,2\}(\eta M) + \{2,2\}(\varkappa M) + \{2,3\}(\lambda M) + \ldots$$
$$\gamma = \{1,3\}(\eta M) + \{2,3\}(\varkappa M) + \{3,3\}(\lambda M) + \ldots$$

u. s. w. Eliminirt man hiemit α, β, γ, etc. aus dem obigen Ausdruck für Z, so wird

$$\begin{aligned} Z = & \big\{\{1,1\}F + \{1,2\}G + \{1,3\}H + \ldots\big\}(\eta M) \\ & + \big\{\{1,2\}F + \{2,2\}G + \{2,3\}H + \ldots\big\}(\varkappa M) \\ & + \big\{\{1,3\}F + \{2,3\}G + \{3,3\}H + \ldots\big\}(\lambda M) \\ & + \ldots \end{aligned}$$

Setzt man daher

$$(44) \quad \ldots \quad \begin{cases} (\eta\eta)\alpha_, + (\eta\varkappa)\beta_, + (\eta\lambda)\gamma_, + \ldots = F \\ (\eta\varkappa)\alpha_, + (\varkappa\varkappa)\beta_, + (\varkappa\lambda)\gamma_, + \ldots = G \\ (\eta\lambda)\alpha_, + (\varkappa\lambda)\beta_, + (\lambda\lambda)\gamma_, + \ldots = H \end{cases}$$

u. s. w. so bekommt man

$$Z = \alpha_,(\eta M) + \beta_,(\varkappa M) + \gamma_,(\lambda M) + \ldots$$

Dieser Ausdruck führt namentlich in der Anwendung unserer Aufgabe auf die Geodäsie, wie man weiter unten sehen wird, auf eine kürzere Rechnung wie jener.

37.

Zur weiteren Ausarbeitung der im Vorhergehenden enthaltenen Auflösung unserer Aufgabe ist zuerst die Auflösung der Gleichungen (40) auszuführen. Man multiplicire die erste (40) mit dem unbestimmten Factor α' und addire sie zur zweiten; man multiplicire ferner die erste mit α'', die zweite mit β'', und addire beide zur dritten; ferner die erste mit α''', die zweite mit β''', die dritte mit γ''', und addire alle diese zur vierten, u. s. w. Bestimmt man nun diese Factoren so, dass nach einander A', A' und B', A', B' und C', u. s. w. verschwinden, dann sind die (40) auf die folgende Form gebracht worden,

$$\begin{aligned} (aa)A' + (ab)B' + (ac)C' + (ad)D' + \ldots &= M = k \\ (bb,1)B' + (bc,1)C' + (bd,1)D' + \ldots &= M' \\ (cc,2)C' + (cd,2)D' + \ldots &= M'' \\ (dd,3)D' + \ldots &= M''' \\ + \ldots \quad & \quad \ldots \end{aligned}$$

und für die eingeführten Hülfsgrössen ergeben sich die folgenden Gleichungen, die zur Bestimmung derselben dienen. Die eingeführten Factoren α', α'', β'', etc. werden durch die folgenden Gleichungen bestimmt,

$$(aa)\alpha' + (ab) = 0$$

$$\begin{aligned} (aa)\alpha'' + (ab)\beta'' + (ac) &= 0 \\ (ab)\alpha'' + (bb)\beta'' + (bc) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (aa)\alpha''' + (ab)\beta''' + (ac)\gamma''' + (ad) &= 0 \\ (ab)\alpha''' + (bb)\beta''' + (bc)\gamma''' + (bd) &= 0 \\ (ac)\alpha''' + (bc)\beta''' + (cc)\gamma''' + (cd) &= 0 \end{aligned}$$

u. s. w. worauf $(bb,1)$, $(bc,1)$, etc. etc. sich durch die folgenden ergeben,

$$\begin{aligned} (ab)\alpha' + (bb) &= (bb,1) \\ (ac)\alpha' + (bc) &= (bc,1) \\ (ad)\alpha' + (bd) &= (bd,1) \\ &\text{etc.} \\ k\alpha' + k' &= M' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ac)\alpha'' + (bc)\beta'' + (cc) &= (cc,2) \\ (ad)\alpha'' + (bd)\beta'' + (cd) &= (cd,2) \\ &\text{etc.} \\ k\alpha'' + k'\beta'' + k'' &= M'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ad)\alpha''' + (bd)\beta''' + (cd)\gamma''' + (dd) &= (dd,3) \\ &\text{etc.} \\ k\alpha''' + k'\beta''' + k''\gamma''' + k''' &= M''' \end{aligned}$$

u. s. w. Vergleicht man aber die Gleichungen zur Bestimmung von α', β'', etc. mit den (40), so wird man sogleich gewahr, dass sie sich auch auf die folgende Form bringen lassen müssen,

$$(aa)\alpha' + (ab) = 0$$

$$\begin{aligned} (aa)\alpha'' + (ab)\beta'' + (ac) &= 0 \\ (bb,1)\beta'' + (bc,1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (aa)\alpha''' + (ab)\beta''' + (ac)\gamma''' + (ad) &= 0 \\ (bb,1)\beta''' + (bc,1)\gamma''' + (bd,1) &= 0 \\ (cc,2)\gamma''' + (cd,2) &= 0 \end{aligned}$$

u. s. w. Setzt man für einen Augenblick

$$\begin{array}{llllll}
A' = & \mathfrak{a}M & + \mathfrak{b}M' & + \mathfrak{c}M'' & + \mathfrak{d}M''' & + \ldots \\
B' = & & \mathfrak{b}'M' & + \mathfrak{c}'M'' & + \mathfrak{d}'M''' & + \ldots \\
C' = & & & \mathfrak{c}''M'' & + \mathfrak{d}''M''' & + \ldots \\
D' = & & & & \mathfrak{d}'''M''' & + \ldots \\
\text{etc.} & & & & \text{etc.} &
\end{array}$$

und substituirt diese in die obigen Gleichungen für A', B', etc., so erhält man

$$\begin{array}{l}
\mathfrak{a}(aa) = 1 \\
\mathfrak{b}(aa) + \mathfrak{b}'(ab) = 0 \\
\mathfrak{c}(aa) + \mathfrak{c}'(ab) + \mathfrak{c}''(ac) = 0 \\
\mathfrak{d}(aa) + \mathfrak{d}'(ab) + \mathfrak{d}''(ac) + \mathfrak{d}'''(ad) = 0 \\
\quad \text{etc.} \\
\mathfrak{b}'(bb,1) = 1 \\
\mathfrak{c}'(bb,1) + \mathfrak{c}''(bc,1) = 0 \\
\mathfrak{d}'(bb,1) + \mathfrak{d}''(bc,1) + \mathfrak{d}'''(bd,1) = 0 \\
\quad \text{etc.} \\
\mathfrak{c}''(cc,2) = 1 \\
\mathfrak{d}''(cc,2) + \mathfrak{d}'''(cd,2) = 0 \\
\quad \text{etc.} \\
\mathfrak{d}'''(dd,3) = 1 \\
\quad \text{etc.}
\end{array}$$

und die Vergleichung dieser mit den vorstehenden, zur Bestimmung von α', β'', etc. dienenden, Gleichungen giebt sogleich

$$\begin{array}{lllll}
\mathfrak{a} = \frac{1}{(aa)}, & \mathfrak{b} = \frac{\alpha'}{(bb,1)}, & \mathfrak{c} = \frac{\alpha''}{(cc,2)}, & \mathfrak{d} = \frac{\alpha'''}{(dd,3)}, & \text{etc.} \\
 & \mathfrak{b}' = \frac{1}{(bb,1)}, & \mathfrak{c}' = \frac{\beta''}{(cc,2)}, & \mathfrak{d}' = \frac{\beta'''}{(dd,3)}, & \text{etc.} \\
 & & \mathfrak{c}'' = \frac{1}{(cc,2)}, & \mathfrak{d}'' = \frac{\gamma'''}{(dd,3)}, & \text{etc.} \\
 & & & \mathfrak{d}''' = \frac{1}{(dd,3)}, & \text{etc.}
\end{array}$$

und hieraus folgt

$$\begin{array}{llllll}
A' = & \frac{M}{(aa)} & + \frac{M'}{(bb,1)}\alpha' & + \frac{M''}{(cc,2)}\alpha'' & + \frac{M'''}{(dd,3)}\alpha''' & + \ldots \\
B' = & & \frac{M'}{(bb,1)} & + \frac{M''}{(cc,2)}\beta'' & + \frac{M'''}{(dd,3)}\beta''' & + \ldots \\
C' = & & & \frac{M''}{(cc,2)} & + \frac{M'''}{(dd,3)}\gamma''' & + \ldots \\
D' = & & & & \frac{M'''}{(dd,3)} & + \ldots
\end{array}$$

u. s. w. durch welche die Unbekannten jede für sich gegeben sind. Diese Gleichungen geben ausserdem Anlass zu anderen Ausdrücken für α', β'', etc. Vergleicht man nemlich die Gleichungen, aus welchen die vorstehenden erhalten worden sind, mit denen für α', β'', etc., so lehrt der Augenschein, dass diese auch auf die folgende Form gebracht werden können,

$$-\alpha' = \frac{(ab)}{(aa)}$$

$$\begin{aligned}
-\alpha'' &= \frac{(ac)}{(aa)} + \frac{(bc,1)}{(bb,1)}\alpha' \\
-\beta'' &= \frac{(bc,1)}{(bb,1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\alpha''' &= \frac{(ad)}{(aa)} + \frac{(bd,1)}{(bb,1)}\alpha' + \frac{(cd,2)}{(cc,2)}\alpha'' \\
-\beta''' &= \frac{(bd,1)}{(bb,1)} + \frac{(cd,2)}{(cc,2)}\beta'' \\
-\gamma''' &= \frac{(cd,2)}{(cc,2)}
\end{aligned}$$

u. s. w. Endlich bekommt man aus den letzten Ausdrücken für A', B', etc. sehr leicht die Coefficienten der unbestimmten Auflösung der Gleichungen (40), denn aus der Substitution der Ausdrücke für M, M', etc. folgt sogleich

$$\begin{aligned}
(1,1) &= \frac{1}{(aa)} + \frac{\alpha'^2}{(bb,1)} + \frac{\alpha''^2}{(cc,2)} + \frac{\alpha'''^2}{(dd,3)} + \ldots \\
(1,2) &= \frac{\alpha'}{(bb,1)} + \frac{\alpha''\beta''}{(cc,2)} + \frac{\alpha'''\beta'''}{(dd,3)} + \ldots \\
(1,3) &= \frac{\alpha''}{(cc,2)} + \frac{\alpha'''\gamma'''}{(dd,3)} + \ldots \\
(1,4) &= \frac{\alpha'''}{(dd,3)} + \ldots \\
&\text{etc.} \\
(2,2) &= \frac{1}{(bb,1)} + \frac{\beta''^2}{(cc,2)} + \frac{\beta'''^2}{(dd,3)} + \ldots \\
(2,3) &= \frac{\beta''}{(cc,2)} + \frac{\beta'''\gamma'''}{(dd,3)} + \ldots \\
(2,4) &= \frac{\beta'''}{(dd,3)} + \ldots \\
&\text{etc.} \\
(3,3) &= \frac{1}{(cc,2)} + \frac{\gamma'''^2}{(dd,3)} + \ldots \\
(3,4) &= \frac{\gamma'''}{(dd,3)} + \ldots \\
&\text{etc.} \\
(4,4) &= \frac{1}{(dd,3)} + \ldots
\end{aligned}$$

u. s. w.

38.

Durch Hülfe des Inhalts des vor. Art. kann man sogleich die Auflösung der Gleichungen (43) hinschreiben. Es wird

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{(\eta M)}{(\eta\eta)} + \frac{(\varkappa M,1)}{(\varkappa\varkappa,1)}\mathfrak{a}' + \frac{(\lambda M,2)}{(\lambda\lambda,2)}\mathfrak{a}'' + \ldots \\
\beta &= \frac{(\varkappa M,1)}{(\varkappa\varkappa,1)} + \frac{(\lambda M,2)}{(\lambda\lambda,2)}\mathfrak{b}'' + \ldots \\
\gamma &= \frac{(\lambda M,2)}{(\lambda\lambda,2)} + \ldots
\end{aligned}$$

u. s. w. wo

$$-\mathfrak{a}' = \frac{(\eta\varkappa)}{(\eta\eta)}$$

$$-\mathfrak{a}'' = \frac{(\eta\lambda)}{(\eta\eta)} + \frac{(\varkappa\lambda,1)}{(\varkappa\varkappa,1)}\mathfrak{a}'$$

$$-\mathfrak{b}'' = \frac{(\varkappa\lambda,1)}{(\varkappa\varkappa,1)}$$

etc.

$$(\eta\varkappa)\mathfrak{a}' + (\varkappa\varkappa) = (\varkappa\varkappa,1)$$

$$(\eta\lambda)\mathfrak{a}' + (\varkappa\lambda) = (\varkappa\lambda,1)$$

etc.

$$(\eta M)\mathfrak{a}' + (\varkappa M) = (\varkappa M,1)$$

$$(\eta\lambda)\mathfrak{a}'' + (\varkappa\lambda)\mathfrak{b}'' + (\lambda\lambda) = (\lambda\lambda,2)$$

etc.

$$(\eta M)\mathfrak{a}'' + (\varkappa M)\mathfrak{b}'' + (\lambda M) = (\lambda M,2)$$

etc.

39.

Nun lassen sich schon die Ausdrücke des Art. 36 für Ω und P auf ihre einfachste Form hinführen. Substituirt man die Ausdrücke des Art. 37 für A', B', etc. in den Ausdruck für Y, und setzt den vorstehenden Ausdrücken analog

$$\begin{aligned}
(al)\alpha' + (bl) &= (bl,1) \\
(al)\alpha'' + (bl)\beta'' + (cl) &= (cl,2) \\
(al)\alpha''' + (bl)\beta''' + (cl)\gamma''' + (dl) &= (dl,3)
\end{aligned}$$

u. s. w. so wird

$$Y = \frac{(al)}{(aa)}M + \frac{(bl,1)}{(bb,1)}M' + \frac{(cl,2)}{(cc,2)}M'' + \frac{(dl,3)}{(dd,3)}M''' + \ldots$$

und substituirt man dieselben Ausdrücke in den Ausdruck für R, so wird

$$R = \frac{M^2}{(aa)} + \frac{M'^2}{(bb,1)} + \frac{M''^2}{(cc,2)} + \frac{M'''^2}{(dd,3)} + \ldots$$

Substituirt man ferner die Ausdrücke des vor. Art. in den Ausdruck für Z, und setzt

$$F\mathfrak{a}' + G = G'$$
$$F\mathfrak{a}'' + G\mathfrak{b}'' + H = H''$$

u. s. w. so bekommt man

$$Z = \frac{(\eta M)}{(\eta\eta)} F + \frac{(\varkappa M,1)}{(\varkappa\varkappa,1)} G' + \frac{(\lambda M,2)}{(\lambda\lambda,2)} H'' + \ldots$$

und die Substitution derselben in den Ausdruck für S giebt

$$S = \frac{(\eta M)^2}{(\eta\eta)} + \frac{(\varkappa M,1)^2}{(\varkappa\varkappa,1)} + \frac{(\lambda M.2)^2}{(\lambda\lambda,2)} + \ldots$$

Will man den zweiten Ausdruck des Art. 36 für Z anwenden, so sind in Folge der Gleichungen (44) die folgenden Ausdrücke zu berechnen,

$$\begin{aligned} \alpha_{,} &= \frac{F}{(\eta\eta)} + \frac{G'}{(\varkappa\varkappa,1)}\mathfrak{a}' + \frac{H''}{(\lambda\lambda,2)}\mathfrak{a}'' + \ldots \\ \beta_{,} &= \frac{G'}{(\varkappa\varkappa,1)} + \frac{H''}{(\lambda\lambda,2)}\mathfrak{b}'' + \ldots \\ \gamma_{,} &= \frac{H''}{(\lambda\lambda,2)} + \ldots \end{aligned}$$

u. s. w. worauf sogleich

$$Z = \alpha_{,}(\eta M) + \beta_{,}(\varkappa M) + \gamma_{,}(\lambda M) + \ldots$$

berechnet werden kann. Dem Vorhergehenden zufolge wird darauf

$$\Omega = \omega + Y - Z\,, \quad P = \frac{1}{R-S}\,.$$

40.

Zur Reduction der Ausdrücke der Grössen $(\alpha\eta)$, $(\beta\eta)$, etc. setze man

$$\begin{aligned} \eta &= q & \varkappa &= r \\ \eta' &= \alpha' q + q' & \varkappa' &= \alpha' r + r' \\ \eta'' &= \alpha'' q + \beta'' q' + q'' & \varkappa'' &= \alpha'' r + \beta'' r' + r'' \\ &\text{etc.} & &\text{etc.} \end{aligned}$$

u. s. w. worauf die Substitution der Ausdrücke für (1,1), (1,2), etc. des Art. 37 in die Ausdrücke für $(\alpha\eta)$, $(\beta\eta)$, etc. des Art. 35 sogleich

$$(\alpha\eta) = \frac{\eta}{(aa)} + \frac{\alpha'\eta'}{(bb,1)} + \frac{\alpha''\eta''}{(cc,2)} + \ldots$$

$$(\alpha\varkappa) = \frac{\varkappa}{(aa)} + \frac{\alpha'\varkappa'}{(bb,1)} + \frac{\alpha''\varkappa''}{(cc,2)} + \ldots$$

$$(\alpha\lambda) = \frac{\lambda}{(aa)} + \frac{\alpha'\lambda'}{(bb,1)} + \frac{\alpha''\lambda''}{(cc,2)} + \ldots$$

etc.

$$(\beta\eta) = \frac{\eta'}{(bb,1)} + \frac{\beta''\eta''}{(cc,2)} + \ldots$$

$$(\beta\varkappa) = \frac{\varkappa'}{(bb,1)} + \frac{\beta''\varkappa''}{(cc,2)} + \ldots$$

$$(\beta\lambda) = \frac{\lambda'}{(bb,1)} + \frac{\beta''\lambda''}{(cc,2)} + \ldots$$

etc.

$$(\gamma\eta) = \frac{\eta''}{(cc,2)} + \ldots$$

$$(\gamma\varkappa) = \frac{\varkappa''}{(cc,2)} + \ldots$$

$$(\gamma\lambda) = \frac{\lambda''}{(cc,2)} + \ldots$$

etc.

u. s. w. giebt. Substituirt man nun diese in die Ausdrücke für $(\eta\eta)$, $(\eta\varkappa)$, etc. des Art. 35, so werden

$$(\eta\eta) = \frac{\eta^2}{(aa)} + \frac{\eta'^2}{(bb,1)} + \frac{\eta''^2}{(cc,2)} + \ldots$$

$$(\eta\varkappa) = \frac{\eta\varkappa}{(aa)} + \frac{\eta'\varkappa'}{(bb,1)} + \frac{\eta''\varkappa''}{(cc,2)} + \ldots$$

$$(\eta\lambda) = \frac{\eta\lambda}{(aa)} + \frac{\eta'\lambda'}{(bb,1)} + \frac{\eta''\lambda''}{(cc,2)} + \ldots$$

etc.

$$(\eta M) = \frac{\eta M}{(aa)} + \frac{\eta' M'}{(bb,1)} + \frac{\eta'' M''}{(cc,2)} + \ldots$$

$$(\varkappa\varkappa) = \frac{\varkappa^2}{(aa)} + \frac{\varkappa'^2}{(bb,1)} + \frac{\varkappa''^2}{(cc,2)} + \ldots$$

$$(\varkappa\lambda) = \frac{\varkappa\lambda}{(aa)} + \frac{\varkappa'\lambda'}{(bb,1)} + \frac{\varkappa''\lambda''}{(cc,2)} + \ldots$$

etc.

$$(\varkappa M) = \frac{\varkappa M}{(aa)} + \frac{\varkappa' M'}{(bb,1)} + \frac{\varkappa'' M''}{(cc,2)} + \ldots$$

$$(\lambda\lambda) = \frac{\lambda^2}{(aa)} + \frac{\lambda'^2}{(bb,1)} + \frac{\lambda''^2}{(cc,2)} + \ldots$$

etc.

$$(\lambda M) = \frac{\lambda M}{(aa)} + \frac{\lambda' M'}{(bb,1)} + \frac{\lambda'' M''}{(cc,2)} + \ldots$$

u. s. w. Endlich gehen durch dieselben Substitutionen die Ausdrücke des Art. 36 für F, G, etc. in die folgenden über

$$F = f + \frac{(al)}{(aa)}\eta + \frac{(bl,1)}{(bb,1)}\eta' + \frac{(cl,2)}{(cc,2)}\eta'' + \ldots$$
$$G = g + \frac{(al)}{(aa)}\varkappa + \frac{(bl,1)}{(bb,1)}\varkappa' + \frac{(cl,2)}{(cc,2)}\varkappa'' + \ldots$$
$$H = h + \frac{(al)}{(aa)}\lambda + \frac{(bl,1)}{(bb,1)}\lambda' + \frac{(cl,2)}{(cc,2)}\lambda'' + \ldots$$

u. s. w. womit alle erforderlichen Grössen auf ihre einfachste Form gebracht worden sind, und die im Art. 35 eingeführte unbestimmte Auflösung der Gleichungen (40) überflüssig wird, und daher nicht ausgeführt zu werden braucht. Alle Ausdrücke, die wir erhalten haben, besitzen eine so regelmässige Gestalt, dass sie ohne Weiteres beliebig fortgesetzt werden können.

41.

In dieser Auflösung sind zugleich die Ausdrücke für die Unbekannten selbst nebst deren Gewichten enthalten, denn setzt man zuerst

$$k = 1\ ,\quad k' = 0\ ,\quad k'' = 0\ ,\ \text{etc.}\ \ \omega = 0$$

so wird $\Omega = x$. Aus den vorstehenden Annahmen folgt aber

$$M = 1\ ,\quad M' = \alpha'\ ,\quad M'' = \alpha''\text{, etc.}$$
$$(\eta M) = (\alpha\eta)\ ,\quad (\varkappa M) = (\alpha\varkappa)\ ,\quad (\lambda M) = (\alpha\lambda)\text{, etc.}$$
$$(\varkappa M,1) = (\alpha\varkappa,1)\ ,\quad (\lambda M,2) = (\alpha\lambda,2)\ ,\ \text{etc.}$$

Setzt man daher

$$x = y - z\ ,\quad x' = y' - z'\ ,\quad x'' = y'' - z''\ ,\ \text{etc.}$$

so wird

$$y = \frac{(al)}{(aa)} + \frac{(bl,1)}{(bb,1)}\alpha' + \frac{(cl,2)}{(cc,2)}\alpha'' + \ldots$$
$$z = \frac{(\alpha\eta)}{(\eta\eta)}F + \frac{(\alpha\varkappa,1)}{(\varkappa\varkappa,1)}G' + \frac{(\alpha\lambda,2)}{(\lambda\lambda,2)}H'' + \ldots$$

oder

$$z = \alpha_{,}(\alpha\eta) + \beta_{,}(\alpha\varkappa) + \gamma_{,}(\alpha\lambda) + \ldots$$

und bezeichnet man die Gewichte von x, x', x'', etc. mit Π, Π', Π'', etc. und setzt

$$\Pi = \frac{1}{\pi - \mu}\ ,\quad \Pi' = \frac{1}{\pi' - \mu'}\ ,\quad \Pi'' = \frac{1}{\pi'' - \mu''}\ ,\ \text{etc.}$$

so werden

$$\pi = \frac{1}{(aa)} + \frac{\alpha'^2}{(bb,1)} + \frac{\alpha''^2}{(cc,2)} + \ldots$$
$$\mu = \frac{(\alpha\eta)^2}{(\eta\eta)} + \frac{(\alpha\varkappa,1)^2}{(\varkappa\varkappa,1)} + \frac{(\alpha\lambda,2)^2}{(\lambda\lambda,2)} + \ldots$$

Macht man ferner

$$k = 0\,,\quad k' = 1\,,\quad k'' = 0,\ \text{etc.}\quad \omega = 0$$

so wird $\Omega = x'$, und man bekommt

$$M = 0\,,\quad M' = 1\,,\quad M'' = \beta'',\ \text{etc.}$$
$$(\eta M) = (\beta\eta)\,,\quad (\varkappa M) = (\beta\varkappa)\,,\quad (\lambda M) = (\beta\lambda),\ \text{etc.}$$
$$(\varkappa M,1) = (\beta\varkappa,1)\,,\quad (\lambda M,2) = (\beta\lambda,2),\ \text{etc.}$$

woraus

$$y' = \frac{(bl,1)}{(bb,1)} + \frac{(cl,2)}{(cc,2)}\beta'' + \ldots$$
$$z' = \frac{(\beta\eta)}{(\eta\eta)}F + \frac{(\beta\varkappa,1)}{(\varkappa\varkappa,1)}G' + \frac{(\beta\lambda,2)}{(\lambda\lambda,2)}H'' + \ldots$$
$$= \alpha_{,}(\beta\eta) + \beta_{,}(\beta\varkappa) + \gamma_{,}(\beta\lambda) + \ldots$$
$$\pi' = \frac{1}{(bb,1)} + \frac{\beta''^2}{(cc,2)} + \ldots$$
$$\mu' = \frac{(\beta\eta)^2}{(\eta\eta)} + \frac{(\beta\varkappa,1)^2}{(\varkappa\varkappa,1)} + \frac{(\beta\lambda,2)^2}{(\lambda\lambda,2)} + \ldots$$

hervorgehen, und ebenso erhält man

$$y'' = \frac{(cl,2)}{(cc,2)} + \ldots$$
$$z'' = \frac{(\gamma\eta)}{(\eta\eta)}F + \frac{(\gamma\varkappa,1)}{(\varkappa\varkappa,1)}G' + \frac{(\gamma\lambda,2)}{(\lambda\lambda,2)}H'' + \ldots$$
$$= \alpha_{,}(\gamma\eta) + \beta_{,}(\gamma\varkappa) + \gamma_{,}(\gamma\lambda) + \ldots$$
$$\pi'' = \frac{1}{(cc,2)} + \ldots$$
$$\mu'' = \frac{(\gamma\eta)^2}{(\eta\eta)} + \frac{(\gamma\varkappa,1)^2}{(\varkappa\varkappa,1)} + \frac{(\gamma\lambda,2)^2}{(\lambda\lambda,2)} + \ldots$$

u. s. w.

42.

Zur leichteren Uebersicht sollen jetzt alle zur Berechnung von Ω, x, x', x'', etc. und P, Π, Π', Π'', etc. erforderlichen Ausdrücke der Reihe nach, so wie sie zur Anwendung kommen, zusammen gestellt werden, hiebei wollen wir jedoch zuerst von den zur Berechnung von Ω und P dienenden Ausdrücken absehen, und diese nach jenen für sich anführen.

Nachdem man die ursprünglich gegebenen Gleichungen so vorbereitet hat, dass die Coefficienten der Gleichungen (29) und (30) bekannt sind, rechne man zuerst

$$(aa) = pa^2 + p'a'^2 + p''a''^2 + \dots$$
$$+ q^2 + r^2 + s^2 + \dots$$
$$(ab) = pab + p'a'b' + p''a''b'' + \dots$$
$$+ qq' + rr' + ss' + \dots$$
$$(ac) = pac + p'a'c' + p''a''c'' + \dots$$
$$+ qq'' + rr'' + ss'' + \dots$$

etc. etc.

$$(al) = pal + p'a'l' + p''a''l'' + \dots$$

$$(bb) = pb^2 + p'b'^2 + p''b''^2 + \dots$$
$$+ q'^2 + r'^2 + s'^2 + \dots$$
$$(bc) = pbc + p'b'c' + p''b''c'' + \dots$$
$$+ q'q'' + r'r'' + s's'' + \dots$$

etc. etc.

$$(bl) = pbl + p'b'l' + p''b''l'' + \dots$$

$$(cc) = pc^2 + p'c'^2 + p''c''^2 + \dots$$
$$+ q''^2 + r''^2 + s''^2 + \dots$$

etc. etc.

$$(cl) = pcl + p'c'l' + p''c''l'' + \dots$$

---

etc. bis

$$(ll) = pl^2 + p'l'^2 + p''l''^2 + \dots$$

Die Anwendung des Ausdrucks (ll), welcher im Vorhergehenden nicht vorgekommen ist, wird weiter unten erklärt werden.

Zu den vorstehenden Ausdrücken ist zu bemerken, dass sie zwar immer ganz so, wie sie angesetzt sind, angewandt werden können, dass aber in gewissen Fällen die von den Coefficienten q, r, s, etc. der Gleichungen (30) abhängigen Glieder entweder ganz weggelassen, oder abgekürzt werden können. Sei wieder m die Anzahl der Gleichungen (24), und n die Anzahl der x, x', x'', etc., dann dürfen die genannten, von den (30) abhängenden, Glieder ganz weggelassen werden, wenn entweder $m > n$ oder $m = n$ ist, wenn aber $m < n$ ist, so müssen die Coefficienten von wenigstens einer Anzahl $n - m$ der Gleichungen (30) aufgenommen werden.

43.

Es sind hierauf die Coefficienten $(bb,1)$, $(bc,1)$, etc. zu berechnen, und dieses kann immerhin durch die im Art. 37 dafür abgeleiteten Ausdrücke geschehen, allein ich ziehe vor, die folgenden anzuwenden, die entweder selbstständig, oder aus den vorhergehenden ähnlichen leicht abgeleitet werden können

$$\alpha' = -\frac{(ab)}{(aa)}, \quad \beta' = -\frac{(ac)}{(aa)}, \quad \gamma' = -\frac{(ad)}{(aa)}, \text{ etc. } \chi' = -\frac{(al)}{(aa)}$$

$$\begin{aligned}
(bb,1) &= (bb) + (ab)\alpha' \\
(bc,1) &= (bc) + (ac)\alpha' \\
(bd,1) &= (bd) + (ad)\alpha' \\
&\text{etc.} \\
(bl,1) &= (bl) + (al)\alpha'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(cc,1) &= (cc) + (ac)\beta' \\
(cd,1) &= (cd) + (ad)\beta' \\
&\text{etc.} \\
(cl,1) &= (cl) + (al)\beta'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(dd,1) &= (dd) + (ad)\gamma' \\
&\text{etc.} \\
(dl,1) &= (dl) + (al)\gamma'
\end{aligned}$$

etc. bis

$$(ll,1) = (ll) + (al)\chi'$$

$$\beta'' = -\frac{(bc,1)}{(bb,1)}, \quad \gamma'' = -\frac{(bd,1)}{(bb,1)}, \text{ etc. } \chi'' = -\frac{(bl,1)}{(bb,1)}$$

$$\begin{aligned}
(cc,2) &= (cc,1) + (bc,1)\beta'' \\
(cd,2) &= (cd,1) + (bd,1)\beta'' \\
&\text{etc.} \\
(cl,2) &= (cl,1) + (bl,1)\beta''
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(dd,2) &= (dd,1) + (bd,1)\gamma'' \\
&\text{etc.} \\
(dl,2) &= (dl,1) + (bl,1)\gamma''
\end{aligned}$$

etc. bis

$$(ll,2) = (ll,1) + (bl,1)\chi''$$

$$\gamma''' = -\frac{(cd,2)}{(cc,2)}\,, \text{ etc. } \chi''' = -\frac{(cl,2)}{(cc,2)}$$

$$(dd,3) = (dd,2) + (cd,2)\gamma'''$$
etc.
$$(dl,3) = (dl,2) + (cl,2)\gamma'''$$
etc. bis
$$(ll,3) = (ll,2) + (cl,2)\chi'''$$
etc. bis (ll,n)

wenn wieder n die Anzahl der x, x', x'', etc. bezeichnet.

Zu bemerken ist hiebei, dass wenn $m = n$, und keine der Gleichungen (30) mit zur Berechnung der (aa), (ab), etc. beigezogen worden sind, so wie wenn $m < n$, und man nur $n - m$ dieser Gleichungen zugezogen hat, immer

$$(ll,n) = 0$$

werden muss.

44.

Nun können die α'', β''', etc. nach folgenden Ausdrücken berechnet werden,

$$\alpha' = \alpha'$$
$$\alpha'' = \beta' + \beta''\alpha'$$
$$\alpha''' = \gamma' + \gamma''\alpha' + \gamma'''\alpha''$$
$$\alpha^{IV} = \delta' + \delta''\alpha' + \delta'''\alpha'' + \delta^{IV}\alpha'''$$
etc.

$$\beta'' = \beta''$$
$$\beta''' = \gamma'' + \gamma'''\beta''$$
$$\beta^{IV} = \delta'' + \delta'''\beta'' + \delta^{IV}\beta'''$$
etc.

$$\gamma''' = \gamma'''$$
$$\gamma^{IV} = \delta''' + \delta^{IV}\gamma'''$$
etc.

$$\delta^{IV} = \delta^{IV}$$
etc.

u. s. w. die ich zu mehrerer Deutlichkeit für eine Unbekannte mehr, wie in den vorangegangenen Ausdrücken hingeschrieben habe. Es wird hierauf

$$
\begin{aligned}
-y &= \chi' + \chi''\alpha' + \chi'''\alpha'' + \chi^{iv}\alpha''' + \ldots \\
-y' &= \chi'' + \chi'''\beta'' + \chi^{iv}\beta''' + \ldots \\
-y'' &= \chi''' + \chi^{iv}\gamma''' + \ldots \\
-y''' &= \chi^{iv} + \ldots \\
&\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\pi &= \frac{1}{(aa)} + \frac{\alpha'^2}{(bb,1)} + \frac{\alpha''^2}{(cc,2)} + \frac{\alpha'''^2}{(dd,3)} + \ldots \\
\pi' &= \frac{1}{(bb,1)} + \frac{\beta''^2}{(cc,2)} + \frac{\beta'''^2}{(dd,3)} + \ldots \\
\pi'' &= \frac{1}{(cc,2)} + \frac{\gamma'''^2}{(dd,3)} + \ldots \\
\pi''' &= \frac{1}{(dd,3)} + \ldots \\
&\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}
$$

Ich mache darauf aufmerksam, dass hierin schon die Auflösung der Aufgabe des Art. 18 u. f. vollständig enthalten ist, denn die für die allgemeine, im Art. 31 aufgestellte Aufgabe noch hinzukommenden Ausdrücke hängen alle so von den Bedingungsgleichungen ab, dass sie zugleich mit diesen wegfallen. In Betreff der Aufgabe des Art. 18 wird also

$$x = y\,,\quad x' = y'\,,\quad x'' = y''\,,\ \text{etc.}$$

und die Gewichte dieser Bestimmungen werden bez.

$$\frac{1}{\pi}\,,\quad \frac{1}{\pi'}\,,\quad \frac{1}{\pi''}\,,\ \text{etc.}$$

In Bezug auf die allgemeine Aufgabe können die bis jetzt zusammengestellten Ausdrücke als den ersten Theil der Auflösung betrachtet werden, und dieser Theil wird, wenn nicht $m < n$ ist, genau so ausgeführt, als wären gar keine Bedingungsgleichungen vorhanden. Wenn aber der eben erwähnte Fall eintritt, so müssen zur Bildung der Coefficienten (aa), (ab), etc. auf die eben erklärte Art wenigstens $n - m$ der Bedingungsgleichungen mit Weglassung ihrer völlig bekannten Glieder zu diesem ersten Theil der Rechnung hinzugezogen werden.

45.

Der zweite Theil der Auflösung unserer allgemeinen Aufgabe fängt mit der Berechnung der mit η, η', etc. $\varkappa$, $\varkappa'$, etc. etc. bezeichneten Hülfsgrössen an, die durch die folgenden Ausdrücke erhalten werden,

$$\begin{aligned}
\eta &= q \\
\eta' &= \alpha' q + q' \\
\eta'' &= \alpha'' q + \beta'' q' + q'' \\
\eta''' &= \alpha''' q + \beta''' q' + \gamma''' q'' + q''' ; \\
&\text{etc.}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\varkappa &= r \\
\varkappa' &= \alpha' r + r' \\
\varkappa'' &= \alpha'' r + \beta'' r' + r'' \\
\varkappa''' &= \alpha''' r + \beta''' r' + \gamma''' r'' + r''' \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda &= s \\
\lambda' &= \alpha' s + s' \\
\lambda'' &= \alpha'' s + \beta'' s' + s'' \qquad\qquad \text{etc.} \\
\lambda''' &= \alpha''' s + \beta''' s' + \gamma''' s'' + s''' , \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

worauf man zunächst

$$\left.\begin{aligned}
F &= f + \frac{(al)}{(aa)}\eta + \frac{(bl,1)}{(bb,1)}\eta' + \frac{(cl,2)}{(cc,2)}\eta'' + \ldots \\
G &= g + \frac{(al)}{(aa)}\varkappa + \frac{(bl,1)}{(bb,1)}\varkappa' + \frac{(cl,2)}{(cc,2)}\varkappa'' + \ldots \\
H &= h + \frac{(al)}{(aa)}\lambda + \frac{(bl,1)}{(bb,1)}\lambda' + \frac{(cl,2)}{(cc,2)}\lambda'' + \ldots
\end{aligned}\right\} \quad . \quad (45)$$

u. s. w. berechnen kann. Hiebei ist zu bemerken, dass wenn man zur Berechnung von (aa), (ab), etc. die Anzahl von $n-m$ Bedingungsgleichungen hinzugezogen hat, für diese $n-m$ Gleichungen

$$F = f, \quad G = g \text{ , etc.}$$

werden muss, indem alsdann für diese die Summe der übrigen Glieder der vorstehenden Gleichungen verschwindet. Hat man mehr wie $n-m$ Gleichungen hinzugezogen, so finden die zuletzt angegebenen Gleichungen nicht mehr statt. Der Beweis dieses Satzes wird sich weiter unten ergeben. Auch wird weiter unten gezeigt werden, dass man die Berechnung der (45) gänzlich umgehen kann.

46.

Es kann nun berechnet werden

$$\begin{aligned}
(\eta\eta) &= \frac{\eta^2}{(aa)} + \frac{\eta'^2}{(bb,1)} + \frac{\eta''^2}{(cc,2)} + \ldots \\
(\eta\varkappa) &= \frac{\eta\varkappa}{(aa)} + \frac{\eta'\varkappa'}{(bb,1)} + \frac{\eta''\varkappa''}{(cc,2)} + \ldots \\
(\eta\lambda) &= \frac{\eta\lambda}{(aa)} + \frac{\eta'\lambda'}{(bb,1)} + \frac{\eta''\lambda''}{(cc,2)} + \ldots \\
&\text{etc.} \qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\varkappa\varkappa) &= \frac{\varkappa^2}{(aa)} + \frac{\varkappa'^2}{(bb,1)} + \frac{\varkappa''^2}{(cc,2)} + \ldots \\
(\varkappa\lambda) &= \frac{\varkappa\lambda}{(aa)} + \frac{\varkappa'\lambda'}{(bb,1)} + \frac{\varkappa''\lambda''}{(cc,2)} + \ldots \\
&\text{etc.} \qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

$$(\lambda\lambda) = \frac{\lambda^2}{(aa)} + \frac{\lambda'^2}{(bb,1)} + \frac{\lambda''^2}{(cc,2)} + \dots$$

etc. etc.

etc.

und hieraus sind Ausdrücke zu berechnen, die denen des Art. 43 vollständig analog sind, nur dass die Grösse, die dort mit (ll) bezeichnet wurde, hier Null ist, nemlich

$$\mathfrak{a}' = -\frac{(\eta\varkappa)}{(\eta\eta)},\quad \mathfrak{b}' = -\frac{(\eta\lambda)}{(\eta\eta)}, \text{ etc. } \mathfrak{x}' = +\frac{F}{(\eta\eta)}$$

$$(\varkappa\varkappa,1) = (\varkappa\varkappa) + (\eta\varkappa)\mathfrak{a}'$$
$$(\varkappa\lambda,1) = (\varkappa\lambda) + (\eta\lambda)\mathfrak{a}'$$
etc.
$$G' = G + F\mathfrak{a}'$$

$$(\lambda\lambda,1) = (\lambda\lambda) + (\eta\lambda)\mathfrak{b}'$$
etc.
$$H' = H + F\mathfrak{b}'$$

etc. bis

$$R' = F\mathfrak{x}'$$

$$\mathfrak{b}'' = -\frac{(\varkappa\lambda,1)}{(\varkappa\varkappa,1)}, \text{ etc. } \mathfrak{x}'' = +\frac{G'}{(\varkappa\varkappa,1)}$$

$$(\lambda\lambda,2) = (\lambda\lambda,1) + (\varkappa\lambda,1)\mathfrak{b}''$$
etc.
$$H'' = H' + G'\mathfrak{b}''$$

etc. bis

$$R'' = R' + G'\mathfrak{x}''$$

etc. bis $R^{(q)}$

wenn wieder q die Anzahl der vorhandenen Bedingungsgleichungen bezeichnet.

47.

Hierauf ist zu berechnen

$$(\alpha\eta) = \frac{\eta}{(aa)} + \frac{\alpha'\eta'}{(bb,1)} + \frac{\alpha''\eta''}{(cc,2)} + \dots$$
$$(\beta\eta) = \frac{\eta'}{(bb,1)} + \frac{\beta''\eta''}{(cc,2)} + \dots$$
$$(\gamma\eta) = \frac{\eta''}{(cc,2)} + \dots$$
etc.

$$(\alpha\varkappa) = \frac{\varkappa}{(aa)} + \frac{\alpha'\varkappa'}{(bb,1)} + \frac{\alpha''\varkappa''}{(cc,2)} + \ldots$$
$$(\beta\varkappa) = \frac{\varkappa'}{(bb,1)} + \frac{\beta''\varkappa''}{(cc,2)} + \ldots$$
$$(\gamma\varkappa) = \frac{\varkappa''}{(cc,2)} + \ldots$$
etc.

$$(\alpha\lambda) = \frac{\lambda}{(aa)} + \frac{\alpha'\lambda'}{(bb,1)} + \frac{\alpha''\lambda''}{(cc,2)} + \ldots$$
$$(\beta\lambda) = \frac{\lambda'}{(bb,1)} + \frac{\beta''\lambda''}{(cc,2)} + \ldots$$
$$(\gamma\lambda) = \frac{\lambda''}{(cc,2)} + \ldots$$
etc.

---

u. s. w. Die Anzahl dieser Gruppen ist der Anzahl der Bedingungsgleichungen, und die Anzahl der Grössen jeder Gruppe der Anzahl der Unbekannten gleich.

48.

Will man nicht blos die Unbekannten selbst, sondern auch ihre Gewichte kennen lernen, so sind noch die folgenden Hülfsgrössen zu berechnen,

$$(\alpha\varkappa,1) = (\alpha\varkappa) + (\alpha\eta)\,\mathfrak{a}'$$
$$(\beta\varkappa,1) = (\beta\varkappa) + (\beta\eta)\,\mathfrak{a}'$$
$$(\gamma\varkappa,1) = (\gamma\varkappa) + (\gamma\eta)\,\mathfrak{a}'$$
etc.

$$(\alpha\lambda,1) = (\alpha\lambda) + (\alpha\eta)\,\mathfrak{b}'$$
$$(\beta\lambda,1) = (\beta\lambda) + (\beta\eta)\,\mathfrak{b}'$$
$$(\gamma\lambda,1) = (\gamma\lambda) + (\gamma\eta)\,\mathfrak{b}'$$
etc.

---

etc.

$$(\alpha\lambda,2) = (\alpha\lambda,1) + (\alpha\varkappa,1)\,\mathfrak{b}''$$
$$(\beta\lambda,2) = (\beta\lambda,1) + (\beta\varkappa,1)\,\mathfrak{b}''$$
$$(\gamma\lambda,2) = (\gamma\lambda,1) + (\gamma\varkappa,1)\,\mathfrak{b}''$$
etc.

---

etc.

---

bis alle Bedingungsgleichungen erschöpft sind. Hierauf werden

$$z = \frac{(\alpha\eta)}{(\eta\eta)} F + \frac{(\alpha x,1)}{(xx,1)} G' + \frac{(\alpha\lambda,2)}{(\lambda\lambda,2)} H'' + \ldots$$
$$z' = \frac{(\beta\eta)}{(\eta\eta)} F + \frac{(\beta x,1)}{(xx,1)} G' + \frac{(\beta\lambda,2)}{(\lambda\lambda,2)} H'' + \ldots$$
$$z'' = \frac{(\gamma\eta)}{(\eta\eta)} F + \frac{(\gamma x,1)}{(xx,1)} G' + \frac{(\gamma\lambda,2)}{(\lambda\lambda,2)} H'' + \ldots$$
etc. etc.

$$\mu = \frac{(\alpha\eta)^2}{(\eta\eta)} + \frac{(\alpha x,1)^2}{(xx,1)} + \frac{(\alpha\lambda,2)^2}{(\lambda\lambda,2)} + \ldots$$
$$\mu' = \frac{(\beta\eta)^2}{(\eta\eta)} + \frac{(\beta x,1)^2}{(xx,1)} + \frac{(\beta\lambda,2)^2}{(\lambda\lambda,2)} + \ldots$$
$$\mu'' = \frac{(\gamma\eta)^2}{(\eta\eta)} + \frac{(\gamma x,1)^2}{(xx,1)} + \frac{(\gamma\lambda,2)^2}{(\lambda\lambda,2)} + \ldots$$
etc. etc.

wodurch in Verbindung mit den Werthen des Art. 44 für y, y', etc. und π, π', etc. alle Unbekannten nebst deren Gewichte gegeben sind.

49.

Will man hingegen auf die Kenntniss der Gewichte der Unbekannten Verzicht leisten, so lässt sich die Berechnung der Werthe der Unbekannten abkürzen, indem die im vor. Art. angegebenen Rechnungen wegfallen, und die folgenden kürzeren an ihre Stelle treten. Man rechne in diesem Falle die Grössen $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}''$, etc. $\mathfrak{A}''$, etc. etc. nach den folgenden Formeln, die ich für fünf Bedingungsgleichungen vollständig hinschreiben will,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}' &= \mathfrak{x}' + \mathfrak{x}^{V}\mathfrak{d}' \\
\mathfrak{B}' &= \mathfrak{x}'' + \mathfrak{x}^{V}\mathfrak{d}'' \\
\mathfrak{C}' &= \mathfrak{x}''' + \mathfrak{x}^{V}\mathfrak{d}''' \\
\mathfrak{D}' &= \mathfrak{x}^{IV} + \mathfrak{x}^{V}\mathfrak{d}^{IV} \\
\hline
\mathfrak{A}'' &= \mathfrak{A}' + \mathfrak{D}'\mathfrak{c}' \\
\mathfrak{B}'' &= \mathfrak{B}' + \mathfrak{D}'\mathfrak{c}'' \\
\mathfrak{C}'' &= \mathfrak{C}' + \mathfrak{D}'\mathfrak{c}''' \\
\hline
\mathfrak{A}''' &= \mathfrak{A}'' + \mathfrak{C}''\mathfrak{b}' \\
\mathfrak{B}''' &= \mathfrak{B}'' + \mathfrak{C}''\mathfrak{b}'' \\
\hline
\mathfrak{A}^{IV} &= \mathfrak{A}''' + \mathfrak{B}'''\mathfrak{a}'
\end{aligned}$$

und die man leicht auf jede beliebige Anzahl von Gleichungen ausdehnen kann, wenn man erwägt, dass hier $\mathfrak{x}^{V}$ für die letzte aller vorhandenen $\mathfrak{x}$, und $\mathfrak{d}'$, $\mathfrak{d}''$, $\mathfrak{d}'''$, $\mathfrak{d}^{IV}$ für die letzten aller vorhandenen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, etc. stehen. Da hierauf

$$\alpha_{,} = \mathfrak{A}^{IV}$$
$$\beta_{,} = \mathfrak{B}'''$$
$$\gamma_{,} = \mathfrak{C}''$$
$$\delta_{,} = \mathfrak{D}'$$
$$\varepsilon_{,} = \mathfrak{E}^{V}$$

werden, so kann man ohne weitere Hülfsgrössen schon

$$\begin{aligned} z &= (\alpha\eta)\alpha_{,} + (\alpha\varkappa)\beta_{,} + (\alpha\lambda)\gamma_{,} + \ldots \\ z' &= (\beta\eta)\alpha_{,} + (\beta\varkappa)\beta_{,} + (\beta\lambda)\gamma_{,} + \ldots \\ z'' &= (\gamma\eta)\alpha_{,} + (\gamma\varkappa)\beta_{,} + (\gamma\lambda)\gamma_{,} + \ldots \\ &\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

berechnen.

50.

Wenn man der Kenntniss der Unbekannten nicht bedarf, sondern blos eine Function Ω derselben nebst deren Gewicht zu ermitteln hat, so erleidet das Verfahren die folgenden Abänderungen. Die Ausdrücke der Artt. 42 und 43 nebst den Ausdrücken des Art. 44 für die α'', β'', β''', etc. müssen berechnet werden. Hierauf setze man

$$\left.\begin{aligned} M &= k \\ M' &= \alpha' k + k' \\ M'' &= \alpha'' k + \beta'' k' + k'' \\ M''' &= \alpha''' k + \beta''' k' + \gamma''' k'' + k''' \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (46)$$

u. s. w. worauf

$$-Y = \chi' M + \chi'' M' + \chi''' M'' + \chi^{IV} M''' + \ldots$$

und

$$R = \frac{M^2}{(aa)} + \frac{M'^2}{(bb,1)} + \frac{M''^2}{(cc,2)} + \frac{M'''^2}{(dd,3)} + \ldots \Big\} \quad . \quad (47)$$

werden, und der erste Theil der Auflösung ausgeführt ist. Es sind darauf die Ausdrücke der Artt. 45 u. 46 zu berechnen, während die der Artt. 47 u. 48 wegfallen. Statt der letzteren berechne man

$$\left.\begin{aligned} (\eta M) &= \frac{\eta M}{(aa)} + \frac{\eta' M'}{(bb,1)} + \frac{\eta'' M''}{(cc,2)} + \ldots \\ (\varkappa M) &= \frac{\varkappa M}{(aa)} + \frac{\varkappa' M'}{(bb,1)} + \frac{\varkappa'' M''}{(cc,2)} + \ldots \\ (\lambda M) &= \frac{\lambda M}{(aa)} + \frac{\lambda' M'}{(bb,1)} + \frac{\lambda'' M''}{(cc,2)} + \ldots \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (48)$$

u. s. w. und

$$(49)\quad\ldots\quad\left\{\begin{array}{l}(\varkappa M,1) = (\varkappa M) + (\eta M)\mathfrak{a}' \\ (\lambda M,1) = (\lambda M) + (\eta M)\mathfrak{b}' \\ (\mu M,1) = (\mu M) + (\eta M)\mathfrak{c}' \\ \text{etc.} \\ \hline (\lambda M,2) = (\lambda M,1) + (\varkappa M,1)\mathfrak{b}'' \\ (\mu M,2) = (\mu M,1) + (\varkappa M,1)\mathfrak{c}'' \\ \text{etc.} \\ \hline (\mu M,3) = (\mu M,2) + (\lambda M,2)\mathfrak{c}''' \\ \text{etc.} \\ \hline \end{array}\right.$$

u. s. w. worauf man

$$Z = \frac{(\eta M)}{(\eta\eta)} F + \frac{(\varkappa M,1)}{(\varkappa\varkappa,1)} G' + \frac{(\lambda M,2)}{(\lambda\lambda,2)} H'' + \ldots$$

und

$$(50)\quad\ldots\quad S = \frac{(\eta M)^2}{(\eta\eta)} + \frac{(\varkappa M,1)^2}{(\varkappa\varkappa,1)} + \frac{(\lambda M,2)^2}{(\lambda\lambda,2)} + \ldots$$

erhält, womit die Aufgabe vollständig gelöst ist.

Hat man aber ausserdem auch die Werthe der Unbekannten x, x', etc. nach den obigen Ausdrücken berechnet, so ist es klar, dass man den wahrscheinlichsten Werth von Ω schon durch die Substitution dieser Werthe von x, x', etc. erhält, und in diesem Falle braucht man die vorstehenden Ausdrücke für Y und Z nicht zu berechnen. Sind die Werthe und Gewichte von mehreren Functionen zu berechnen, so müssen die in diesem Art. erklärten Rechnungen für jede dieser Functionen besonders ausgeführt werden.

51.

In Bezug auf die Ausdrücke (45) für F, G, H, etc. ist eine Bemerkung zu machen, wodurch ihre Bedeutung erklärt, und die Beweise der beiden am Ende des Art. 45 angeführten Sätze erhalten werden. Substituirt man die Ausdrücke für η, η', etc. $\varkappa$, $\varkappa'$, etc. etc. in die (45), so ergiebt sich sogleich in Folge der Ausdrücke für y, y', etc. des Art. 44 dass auch

$$\begin{aligned} F &= f + qy + q'y' + q''y'' + \ldots \\ G &= g + ry + r'y' + r''y'' + \ldots \\ H &= h + sy + s'y' + s''y'' + \ldots \end{aligned}$$

u. s. w. sind, und diese Ausdrücke geben zu erkennen, dass F, G, H, etc. das Resultat der Substitution der Grössen $\xi + y$, $\xi' + y'$, etc. in die

ursprünglichen Bedingungsgleichungen sind, wenn ξ, ξ', etc. im Sinne des Art. 28 wieder aufgenommen werden. Es wird mit anderen Worten in den Bezeichnungen des Art. 28

$$\begin{aligned} \psi(\xi+y,\ \xi'+y',\ \xi''+y'',\ \text{etc.}) &= F \\ \chi(\xi+y,\ \xi'+y',\ \xi''+y'',\ \text{etc.}) &= G \\ \text{etc.} \qquad\qquad &\quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Wenn man nun die Coefficienten der veränderlichen Glieder von $n-m$ Bedingungsgleichungen mit zur Berechnung der Hülfsgrössen (aa), (ab), etc. benutzt hat, so sind die Werthe von y, y', etc., die man erhält, aus einer gleichen Anzahl von linearischen Gleichungen bestimmt worden, die folglich alle durch diese Werthe von y, y', etc. vollständig erfüllt sind. Es müssen daher die Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= qy + q'y' + q''y'' + \dots \\ 0 &= ry + r'y' + r''y'' + \dots \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

wenn hierunter die $n-m$ mit angewandten Bedingungsgleichungen verstanden werden, vollständig durch die erhaltenen Werthe von y, y', etc. erfüllt sein. Hiemit geben aber die obigen Gleichungen für F, G, etc. in Bezug auf diese $n-m$ Gleichungen

$$F = f, \quad G = g, \text{ etc.}$$

w. z. b. w. In jedem Falle ergeben sich aber durch die Substitution der Summen der anfänglich angenommenen Werthe der Unbekannten und der y, y', etc. in die Bedingungsgleichungen sofort die Werthe der F, G, etc. und die Berechnung der Ausdrücke (45) wird überflüssig w. z. b. w.

52.

Die vorhergehende Auflösung unserer Aufgabe zeigt schon zur Gnüge, dass den Bedingungsgleichungen (30) vollständig Gnüge geleistet worden ist, aber demungeachtet scheint es mir nicht überflüssig dieses a posteriori durch Anwendung der Function Ω auf eine derselben nachzuweisen. Da ferner diese Bedingungsgleichungen ohne Hülfe von Beobachtungen erlangt worden sind, und demzufolge gewiss sind, so muss sich dieses auch durch das Gewicht P derselben nachweisen lassen, welches in Bezug auf diese Bedingungsgleichungen unendlich gross werden muss. Sei zu dem Ende

$$\omega = f, \quad k = q, \quad k' = q', \quad k'' = q'', \text{ etc.}$$

dann wird

$$\Omega = qx + q'x' + q''x'' + \ldots + f$$

und $\Omega = 0$ ist mit der ersten Bedingungsgleichung (30) identisch. Durch die vorstehenden Annahmen ergiebt sich

$$M = \eta, \quad M' = \eta', \quad M'' = \eta'', \text{ etc.}$$
$$(\eta M) = (\eta\eta), \quad (\varkappa M) = (\eta\varkappa), \quad (\lambda M) = (\eta\lambda), \text{ etc.}$$
$$(\varkappa M, 1) = 0, \quad (\lambda M, 2) = 0, \text{ etc.}$$

womit, nach Substitution der Ausdrücke für χ', χ'', etc.

$$Y = \frac{(ab)}{(aa)}\eta + \frac{(bb,1)}{(bb,1)}\eta' + \frac{(cb,2)}{(cc,2)}\eta'' + \ldots$$
$$= F - f$$

und $Z = F$ folglich

$$\Omega = 0$$

wird, w. z. b. w. Substituirt man auch die obigen Ausdrücke für M, M', etc. in die für R und Z, so erhält man

$$R = (\eta\eta), \quad S = (\eta\eta)$$

folglich

$$P = \infty$$

w. z. b. w. Auf dieselbe Art beweist man das Erfülltsein der übrigen Gleichungen (30).

53.

Für die Summe der mit den bez. Gewichten multiplicirten Quadrate der übrig bleibenden Fehler lässt sich mit Benutzung des Vorhergehenden ein einfacher Ausdruck geben. Da den Gleichungen (30) vollständig Gnüge geleistet worden ist, so ist die genannte Summe, wenn sie mit W bezeichnet wird,

$$\begin{aligned} W = & \, p\{ax + bx' + cx'' + \ldots - l\}^2 \\ & + p'\{a'x + b'x' + c'x'' + \ldots - l'\}^2 \\ & + p''\{a''x + b''x' + c''x'' + \ldots - l''\}^2 \\ & + \text{etc.} \end{aligned}$$

oder wenn man die Quadrate entwickelt,

$$\begin{aligned} W = & \, \{[aa]x + [ab]x' + [ac]x'' + \ldots - (al)\}x \\ & + \{[ab]x + [bb]x' + [bc]x'' + \ldots - (bl)\}x' \\ & + \{[ac]x + [bc]x' + [cc]x'' + \ldots - (cl)\}x'' \\ & + \text{etc.} \\ & - \{(al)x + (bl)x' + (cl)x'' + \ldots - (ll)\} \end{aligned}$$

wo die Bezeichnungen $[aa]$, $[ab]$, etc. dem Art. 34 und (al), (bl), etc. dem Art. 42 gemäss zu verstehen sind. Eliminirt man hier $[aa]$, $[ab]$, etc. vermittelst der Gleichungen

$$(aa) = [aa] + [qq]$$
$$(ab) = [ab] + [qq']$$
$$\text{etc.}$$

die im Art. 34 erklärt worden sind, und setzt

$$\begin{aligned} W' = & \{(aa)x + (ab)x' + (ac)x'' + \ldots - (al)\}x \\ & + \{(ab)x + (bb)x' + (bc)x'' + \ldots - (bl)\}x' \\ & + \{(ac)x + (bc)x' + (cc)x'' + \ldots - (cl)\}x'' \\ & + \text{etc.} \\ & - \{(al)x + (bl)x' + (cl)x'' + \ldots - (ll)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W'' = & \{[qq]x + [qq']x' + [qq'']x'' + \ldots\}x \\ & + \{[qq']x + [q'q']x' + [q'q'']x'' + \ldots\}x' \\ & + \{[qq'']x + [q'q'']x' + [q''q'']x'' + \ldots\}x'' \\ & + \text{etc.} \end{aligned}$$

so wird

$$W = W' - W''$$

Wenden wir uns nun zunächst zur Reduction der Function W'', so geben die Gleichungen (30) zuerst

$$\begin{aligned} [qq]x + [qq']x' + [qq'']x'' + \ldots &= -qf - rg - sh - \ldots \\ [qq']x + [q'q']x' + [q'q'']x'' + \ldots &= -q'f - r'g - s'h - \ldots \\ [qq'']x + [q'q'']x' + [q''q'']x'' + \ldots &= -q''f - r''g - s''h - \ldots \\ \text{etc.} \qquad\qquad & \qquad\qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

deren Substitution

$$\begin{aligned} W'' = & -(qx + q'x' + q''x'' + \ldots)f \\ & -(rx + r'x' + r''x'' + \ldots)g \\ & -(sx + s'x' + s''x'' + \ldots)h \\ & - \text{etc.} \end{aligned}$$

und in Folge der (30)

$$W'' = f^2 + g^2 + h^2 \ldots$$

giebt.

54.

Zur Reduction des Ausdrucks für W' setze man zuerst

$$k = (aa), \quad k' = (ab), \quad k'' = (ac), \text{ etc. } \omega = -(al)$$

wodurch

$$\Omega = (aa)x + (ab)x' + (ac)x'' + \ldots - (al)$$

wird. Die Ausdrücke des Art. 50 geben nun

$$M = (aa)\,, \quad M' = 0\,, \quad M'' = 0\,, \text{ etc.}$$
$$(\eta M) = q\,, \quad (\varkappa M) = r\,, \quad (\lambda M) = s\,, \text{ etc.}$$
$$(\varkappa M,1) = q\mathfrak{a}' + r\,, \quad (\lambda M,2) = q\mathfrak{a}'' + r\mathfrak{b}'' + s\,, \text{ etc.}$$

woraus

$$\Omega = -\frac{F}{(\eta\eta)}q - \frac{G'}{(\varkappa\varkappa,1)}(q\mathfrak{a}' + r) - \frac{H''}{(\lambda\lambda,2)}(q\mathfrak{a}'' + r\mathfrak{b}'' + s) - \text{etc.}$$

folgt. Setzt man ferner

$$k = (ab)\,, \quad k' = (bb)\,, \quad k'' = (bc)\,, \text{ etc. } \omega = -(bl)$$

so gehen dieselben Ausdrücke über in

$$M = (ab)\,, \quad M' = (bb,1)\,, \quad M'' = 0\,, \text{ etc.}$$
$$(\eta M) = q'\,, \quad (\varkappa M) = r'\,, \quad (\lambda M) = s'\,, \text{ etc.}$$
$$(\varkappa M,1) = q'\mathfrak{a}' + r'\,, \quad (\lambda M,2) = q'\mathfrak{a}'' + r'\mathfrak{b}' + s'\,, \text{ etc.}$$

wodurch, wenn man den jetzigen Ausdruck von Ω mit Ω' bezeichnet,

$$\Omega' = -\frac{F}{(\eta\eta)}q' - \frac{G'}{(\varkappa\varkappa,1)}(q'\mathfrak{a}' + r') - \frac{H''}{(\lambda\lambda,2)}(q'\mathfrak{a}'' + r'\mathfrak{b}'' + s') - \text{etc.}$$

hervorgeht. Auf dieselbe Art ergiebt sich

$$\Omega'' = -\frac{F}{(\eta\eta)}q'' - \frac{G'}{(\varkappa\varkappa,1)}(q''\mathfrak{a}' + r'') - \frac{H''}{(\lambda\lambda,2)}(q''\mathfrak{a}'' + r''\mathfrak{b}'' + s'') - \text{etc.}$$

u. s. w. Setzt man endlich

$$k = -(al)\,, \quad k' = -(bl)\,, \quad k'' = -(cl)\,, \text{ etc. } \omega = (ll)$$

so wird

$$M = -(al)\,, \quad M' = -(bl,1)\,, \quad M'' = -(cl,2)\,, \text{ etc.}$$
$$(\eta M) = f - F\,, \quad (\varkappa M) = g - G\,, \quad (\lambda M) = h - H\,, \text{ etc.}$$
$$(\varkappa M,1) = f\mathfrak{a}' + g - G'\,, \quad (\lambda M,2) = f\mathfrak{a}'' + g\mathfrak{b}'' + h - H''\,, \text{ etc.}$$

und wenn man den jetzigen Ausdruck von Ω mit $\Omega_{,}$ bezeichnet, so folgt hieraus

$$\Omega_{,} = (ll) - \frac{(al)^2}{(aa)} - \frac{(bl,1)^2}{(bb,1)} - \frac{(cl,2)^2}{(cc,2)} - \ldots$$
$$+ \frac{F}{(\eta\eta)}(F - f) + \frac{G'}{(\varkappa\varkappa,1)}(G' = f\mathfrak{a}' - g) + \frac{H''}{(\lambda\lambda,2)}H'' - f\mathfrak{a}'' - g\mathfrak{b}'' - h) + \ldots$$

Zufolge des Vorhergehenden wird nun

$$W' = \Omega x + \Omega' x' + \Omega'' x'' + \ldots + \Omega_{,}$$

und substituirt man hierin die eben erhaltenen Werthe von Ω, Ω', etc., so verschwinden vermöge der Bedingungsgleichungen (30) die x, x', etc. von selbst, und man erhält

$$W' = (ll) - \frac{(al)^2}{(aa)} - \frac{(bl,1)^2}{(bb,1)} - \frac{(cl,2)^2}{(cc,2)} - \ldots$$
$$+ \frac{F^2}{(\eta\eta)} + \frac{G'^2}{(\varkappa\varkappa,1)} + \frac{H''^2}{(\lambda\lambda,2)} + \ldots$$

Aber die Ausdrücke des Art. 43 geben nach und nach

$$(ll,1) = (ll) - \frac{(al)^2}{(aa)}$$
$$(ll,2) = (ll,1) - \frac{(bl,1)^2}{(bb,1)}$$
etc.
$$(ll,n) = (ll) - \frac{(al)^2}{(aa)} - \frac{(bl,1)^2}{(bb,1)} - \frac{(cl,2)^2}{(cc,2)} - \ldots$$

und aus denen des Art. 46 bekommt man eben so

$$R' = \frac{F^2}{(\eta\eta)}$$
$$R'' = R' + \frac{G'^2}{(\varkappa\varkappa,1)}$$
etc.
$$R^{(q)} = \frac{F^2}{(\eta\eta)} + \frac{G'^2}{(\varkappa\varkappa,1)} + \frac{H''^2}{(\lambda\lambda,2)} + \ldots$$

und folglich wird

$$W' = (ll,n) + R^{(q)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (51)$$

Dieser Ausdruck giebt für sich allein die Summe der mit den bez. Gewichten multiplicirten Fehlerquadrate, wenn zur Berechnung der (aa), (ab), etc. keine der Gleichungen (30) hinzugezogen worden sind, denn in diesem Falle muss $W'' = 0$ gesetzt werden, und es wird folglich $W = W'$.

Wenn im Gegentheil die Gleichungen (30) oder einige derselben zur Berechnung von (aa), (ab), etc. mit verwandt worden sind, so wird die genannte Summe

$$W = W' - W'' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (52)$$

wo W'' den im vor. Art. gefundenen Ausdruck hat, nemlich

$$W'' = f^2 + g^2 + h^2 + \ldots$$

ist, worin aber nur diejenigen f, g, h, etc. aufgenommen werden dürfen, die denjenigen Gleichungen (30) angehören, deren übrige Coefficienten mit zur Berechnung von (aa), (ab), etc. gedient haben.

55.

Ehe ich zu den Beispielen, die zur Erläuterung der vorstehenden Auflösung der allgemeinen Aufgabe dienen sollen, übergehe, will ich den speciellen Fall betrachten, in welchem die Gleichungen (29) in die folgenden einfacheren übergehen,

$$x = l\,,\quad x' = l'\,,\quad x'' = l''\,,\ \text{etc.}$$

und die Gewichte dieser Bestimmungen bez.

$$p\,,\quad p'\,,\quad p''\,,\ \text{etc.}$$

sind. Die allgemeine Aufgabe geht dadurch in diejenige über, die Gauss in seinem »Supplementum theoriae combinationis etc.« behandelt hat. Da jetzt die Anzahl der Gleichungen (29) der Anzahl der Unbekannten gleich ist, so brauchen zur Berechnung der Hülfsgrössen (aa), (ab), etc. die Coefficienten der Bedingungsgleichungen nicht hinzugezogen zu werden. Die mit α', α'' β', β'' etc. etc. bezeichneten Hülfsgrössen werden alle gleich Null, und man bekommt

$$\begin{array}{llll} (aa) = p\,, & (bb,1) = p'\,, & (cc,2) = p''\,, & \text{etc.} \\ (al) = pl\,, & (bl,1) = p'l'\,, & (cl,2) = p''l''\,, & \text{etc.} \end{array}$$

Alle übrigen auf ähnliche Weise bezeichneten Coefficienten werden Null, und hiemit ergiebt sich

$$y = l\,,\quad y' = l'\,,\quad y'' = l''\,,\quad \text{etc.}\quad (ll,n) = 0$$

womit der erste Theil der Auflösung schon gegeben ist. Für den zweiten Theil derselben ergiebt sich nun aus dem Vorhergehenden

$$\begin{array}{llll} \eta = q\,, & \eta' = q'\,, & \eta'' = q''\,, & \text{etc.} \\ \varkappa = r\,, & \varkappa' = r'\,, & \varkappa'' = r''\,, & \text{etc.} \\ \lambda = s\,, & \lambda' = s'\,, & \lambda'' = s''\,, & \text{etc.} \\ \text{etc.} & & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} F &= f + lq + l'q' + l''q'' + \ldots \\ G &= g + lr + l'r' + l''r'' + \ldots \\ H &= h + ls + l's' + l''s'' + \ldots \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\eta\eta) &= \frac{q^2}{p} + \frac{q'^2}{p'} + \frac{q''^2}{p''} + \ldots \\ (\eta\varkappa) &= \frac{qr}{p} + \frac{q'r'}{p'} + \frac{q''r''}{p''} + \ldots \\ (\eta\lambda) &= \frac{qs}{p} + \frac{q's'}{p'} + \frac{q''s''}{p''} + \ldots \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

$$(\varkappa\varkappa) = \frac{r^2}{p} + \frac{r'^2}{p'} + \frac{r''^2}{p''} + \ldots$$
$$(\varkappa\lambda) = \frac{rs}{p} + \frac{r's'}{p'} + \frac{r''s''}{p''} + \ldots$$
etc.
$$(\lambda\lambda) = \frac{s^2}{p} + \frac{s'^2}{p'} + \frac{s''^2}{p''} + \ldots$$

u. s. w. und hieraus sind auf jeden Fall die im Art. 46 erklärten Hülfsgrössen $(\varkappa\varkappa,1)$, $(\lambda\lambda,2)$, etc. G', H'', etc. zu berechnen, aus welchen man, wenn man von der Berechnung der Gewichte von x, x', etc. absehen will, sogleich durch die Ausdrücke des Art. 49 die $\alpha_,$, $\beta_,$, $\gamma_,$, etc. berechnen kann. Da nun zufolge des Art. 47 hier

$$(\alpha\eta) = \frac{q}{p}\,, \quad (\beta\eta) = \frac{q'}{p'}\,, \quad \text{etc. etc.}$$

werden, so ergeben sich sogleich

$$z = \frac{q\alpha_, + r\beta_, + s\gamma_, + \ldots}{p}$$
$$z' = \frac{q'\alpha_, + r'\beta_, + s'\gamma_, + \ldots}{p'}$$
$$z'' = \frac{q''\alpha_, + r''\beta_, + s''\gamma_, + \ldots}{p''}$$

u. s. w. worauf wieder

$$x = y - z\,, \quad x' = y' - z'\,, \quad x'' = y'' - z''\,, \quad \text{etc.}$$

werden. Da die anfänglich zu substituirenden Werthe der Unbekannten nur der Bedingung unterliegen, dass sie bewirken sollen, dass l, l', l'', etc. möglichst kleine Grössen werden, so kann man jedenfalls hier diese Werthe so annehmen, dass daraus

$$l = l' = l'' = \text{etc.} = 0$$

werden. Hiemit werden auch

$$y = y' = y'' = \text{etc.} = 0$$

und

$$F = f\,, \quad G = g\,, \quad H = h\,, \quad \text{etc.}$$

wodurch sich die Auflösung vereinfacht. Die vorstehenden Formeln sind mit den Gaussischen identisch.

Auch die Ausdrücke für die Bestimmung der Gewichte der Unbekannten, die ich der Kürze wegen weglasse, da sie leicht aus dem Vorhergehenden zu erhalten sind, stimmen mit den Gaussischen überein.

56.

Ich werde nun die im Vorhergehenden erhaltene Auflösung der allgemeinen Aufgabe durch ein fingirtes, einfaches Beispiel erläutern,

mit welchem man eine Anzahl von Veränderungen vornehmen kann. Seien die Gleichungen, die den (29) entsprechen, die folgenden,

$$\begin{aligned} x + x' + x'' + x''' + x^{\text{IV}} + x^{\text{V}} &= 1 \\ 2x - 3x' &= 1 \\ x'' - x''' + x^{\text{IV}} - x^{\text{V}} &= 2 \end{aligned}$$

also $a = 1$, $b = 1$, etc. $a' = 2$, $b' = -3$, etc. etc. Seien ferner die Gleichungen (30) die folgenden

$$\begin{aligned} x + x' + x'' \qquad\qquad + 1 &= 0 \\ x' - x'' + 2x''' \qquad - 3 &= 0 \\ x^{\text{IV}} - x^{\text{V}} - 1 &= 0 \end{aligned}$$

also $q = 1$, $q' = 1$, etc. $r = 0$, $r' = -1$, etc. etc. Ich habe hier die Anzahl aller Gleichungen absichtlich der Anzahl der Unbekannten gleich angenommen, um die Relationen, die daraus hervorgehen, am Beispiel zu zeigen.

Man muss nun hier bei der Berechnung der Hülfsgrössen (aa), (ab), etc. alle drei Bedingungsgleichungen auf die oben erklärte Art mit berücksichtigen, denn es ist hier $n = 6$, $m = 3$, folglich $n - m = 3$. Setzt man der Einfachheit wegen das Gewicht einer jeden der drei ersten Gleichungen $= 1$, so bekommt man durch die Ausdrücke des Art. 42

$$\begin{array}{lllllll} (aa) = 6, & (ab) = -4, & (ac) = 2, & (ad) = 1, & (ae) = 1, & (af) = 1, & (al) = 3 \\ & (bb) = 12, & (bc) = 1, & (bd) = 3, & (be) = 1, & (bf) = 1, & (bl) = -2 \\ & & (cc) = 4, & (cd) = -2, & (ce) = 2, & (cf) = 0, & (cl) = 3 \\ & & & (dd) = 6, & (de) = 0, & (df) = 2, & (dl) = -1 \\ & & & & (ee) = 3, & (ef) = -1, & (el) = 3 \\ & & & & & (ff) = 3, & (fl) = -1 \\ & & & & & & (ll) = 6 \end{array}$$

und hiemit durch Art. 43

$(bb,1)$ 9.3333,	$(bc,1)$ 2.3333,	$(bd,1)$ 3.6667,	$(be,1)$ 1.1667,	$(bf,1)$ 1.1667,	$(bl,1)$ 0
	$(cc,2)$ 2.7500,	$(cd,2)$ −3.2500,	$(ce,2)$ 1.2500,	$(cf,2)$ −0.7500,	$(cl,2)$ 2
		$(dd,3)$ 0.55195,	$(de,3)$ 0.65585,	$(df,3)$ 0.29221,	$(dl,3)$ 0.86364
			$(ee,4)$ 1.18822,	$(ef,4)$ −1.47060,	$(el,4)$ 0.56470
				$(ff,5)$ 0.35638,	$(fl,5)$ −0.71287
					$(ll,6)$ −0.0002

Es muss hier strenge $(ll,6) = 0$ werden, die nicht vollständige Erfüllung dieser Gleichung durch die vorstehende Rechnung rührt blos von den Fehlern der letzten angewandten Decimale her. Diese Gleichung würde vollständig erfüllt werden, wenn man sich erlauben wollte $(ff,5) = 0.35644$ statt $= 0.35638$ zu setzen. Da diese Rechnung zugleich gegeben hat

α'	β'	γ'	δ'	ε'	χ'
9.82391,	9.52288n,	9.22185n,	9.22185n,	9.22185n,	9.69897n
	β''	γ''	δ''	ε''	χ''
	9.39793n,	9.59423n,	9.25181n,	9.25181n,	$-\infty$
		γ'''	δ'''	ε'''	χ'''
		0.07255,	9.65758n,	9.43573n,	9.86170n
			δ^{IV}	ε^{IV}	χ^{IV}
			0.07491n,	9.72380n,	0.19443n
				ε^{V}	χ^{V}
				0.09260,	9.67694n
					χ^{VI}
					0.30108

wo die Logarithmen statt der Zahlen angesetzt worden sind, so giebt der Art. 44 zuerst

α''	α'''	α^{IV}	α^{V}
9.69897n,	0.00838n,	0.06191,	0.18890
	β'''	β^{IV}	β^{V}
	9.83778n,	9.87684,	0.02107
		γ^{IV}	γ^{V}
		0.26930n,	0.42388n
			δ^{V}
			0.30110n

und hierauf

$$\begin{aligned} y &= -4.0001 & \pi &= 10.0045 \\ y' &= -3.0000 & \pi' &= 4.5573 \\ y'' &= +7.0000 & \pi'' &= 25.5651 \\ y''' &= +5.0000 & \pi''' &= 14.2278 \\ y^{IV} &= -2.0000 & \pi^{IV} &= 5.1406 \\ y^{V} &= -2.0000 & \pi^{V} &= 2.8058 \end{aligned}$$

womit der erste Theil der Auflösung ausgeführt ist. Zum zweiten Theile übergehend, geben die Ausdrücke des Art. 45

$$\begin{array}{llll} \eta = 1 \ , & \varkappa = 0 \ , & \lambda = 0 \\ \eta' = +1.6667 \ , & \varkappa' = 1 \ , & \lambda' = 0 \\ \eta'' = +0.2500 \ , & \varkappa'' = -1.2500 \ , & \lambda'' = 0 \\ \eta''' = -0.52597 \ , & \varkappa''' = +0.12989 \ , & \lambda''' = 0 \\ \eta^{IV} = +0.04718 \ , & \varkappa^{IV} = +0.23525 \ , & \lambda^{IV} = 1 \\ \eta^{V} = -0.05931 \ , & \varkappa^{V} = -0.29703 \ , & \lambda^{V} = +0.23780 \end{array}$$

$$F = f = 1 \ , \quad G = g = -3 \ , \quad H = h = -1$$

welche letzte drei Gleichungen hier stattfinden müssen. Der Art. 46 giebt hierauf

$$\begin{array}{lll} (\eta\eta) = 1.00001 \ , & (\varkappa\varkappa) = 1.00003 \ , & (\lambda\lambda) = 1.00041 \\ (\eta\varkappa) = -0.00009 \ , & (\varkappa\lambda) = -0.00017 & \\ (\eta\lambda) = +0.00014 & & \end{array}$$

Diese Werthe von $(\eta\eta)$, $(\varkappa\varkappa)$, $(\lambda\lambda)$ sind so wenig von der 1 verschieden, dass man annehmen darf, dass der wahre Werth derselben = 1 ist, und aus demselben Grunde kann man annehmen, dass $(\eta\varkappa)$, $(\eta\lambda)$, $(\varkappa\lambda)$ gleich Null sind. Hiemit werden $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}''$, etc. $\mathfrak{b}''$, etc. auch gleich Null, und

$$\begin{array}{llll} (\varkappa\varkappa,1) = 1 \ , & (\lambda\lambda,2) = 1 \ , & G' = -3 \ , & H'' = 1 \\ (\varkappa\lambda,1) = 0 & & & K''' = 11 \end{array}$$

Die Ausdrücke des Art. 47 geben ferner

$$\begin{array}{lll} (\alpha\eta) = +1.0005 \ , & (\alpha\varkappa) = -1.0004 \ , & (\alpha\lambda) = +2.00146 \\ (\beta\eta) = +0.66703, & (\beta\varkappa) = -0.66694, & (\beta\lambda) = +1.33429 \\ (\gamma\eta) = -0.66757, & (\gamma\varkappa) = +1.6672 \ , & (\gamma\lambda) = -3.33560 \\ (\delta\eta) = -0.66734, & (\delta\varkappa) = +1.6671 \ , & (\delta\lambda) = -2.33480 \\ (\varepsilon\eta) = -0.16628, & (\varepsilon\varkappa) = -0.83358, & (\varepsilon\lambda) = +1.66762 \\ (\zeta\eta) = -0.16642, & (\zeta\varkappa) = -0.83342, & (\zeta\lambda) = +0.66722 \end{array}$$

und die des Art. 48

$$\begin{array}{ll} (\alpha\varkappa,1) = -1.0004 \ , & (\alpha\lambda,2) = +2.0015 \\ (\beta\varkappa,1) = -0.6669 \ , & (\beta\lambda,2) = +1.3343 \\ (\gamma\varkappa,1) = +1.6672 \ , & (\gamma\lambda,2) = -3.3356 \\ (\delta\varkappa,1) = +1.6671 \ , & (\delta\lambda,2) = -2.3348 \\ (\varepsilon\varkappa,1) = -0.8336 \ , & (\varepsilon\lambda,2) = +1.6672 \\ (\zeta\varkappa,1) = -0.8334 \ , & (\zeta\lambda,2) = +0.6672 \end{array}$$

und wenn man die letzte Decimale ausgleicht

$$\begin{array}{llll} z = 2.0000 & & \mu = 6.0000 \\ z' = 1.3333 & & \mu' = 2.6667 \\ z'' = -2.3333 & & \mu'' = 14.3333 \\ z''' = -3.3333 & & \mu''' = 8.6667 \\ z^{IV} = +0.6667 & & \mu^{IV} = 3.5000 \\ z^{V} = +1.6667 & & \mu^{V} = 1.1667 \end{array}$$

Es wird daher schliesslich

$x = -6$	mit dem Gewicht	$= 0.250$
$x' = -4.3333$	» » »	$= 0.529$
$x'' = +9.3333$	» » »	$= 0.089$
$x''' = +8.3333$	» » »	$= 0.180$
$x^{IV} = -2.6667$	» » »	$= 0.610$
$x^{V} = -3.6667$	» » «	$= 0.610$

Löst man die gegebenen sechs Gleichungen auf gewöhnliche Art auf, welches wegen der einfachen Coefficienten in diesem Falle leicht zu bewirken ist, so bekommt man dieselben Werthe der Unbekannten wieder. Die Gewichte habe ich mit berechnet, weil sie in der That im gegenwärtigen Falle dieselbe Bedeutung haben, wie in dem Falle, wo die Anzahl der Gleichungen grösser ist wie die der Unbekannten. Giebt man den ursprünglichen Gleichungen andere Gewichte, wie die, welche oben angenommen wurden, so wird man im gegenwärtigen Falle zwar immer dieselben Werthe der Unbekannten wieder erhalten, aber die Gewichte werden andere Werthe bekommen. Wenn man im Gegentheil in den Fällen, wo die Anzahl der Gleichungen grösser ist wie die der Unbekannten, die Gewichte der Gleichungen ändert, so werden sich nicht nur die Gewichte der Unbekannten, sondern auch die Werthe derselben ändern.

Da im gegenwärtigen Falle die Summe der Fehlerquadrate $= 0$ werden muss, so muss sich dieses auch durch die Werthe von W' und W'' des Art. 54 aussprechen. Man findet in der That durch die dortigen Ausdrücke

$$W' = W'' = 11$$

folglich $W = 0$.

57.

Es soll nun das vorhergehende Beispiel in soweit abgeändert werden, dass wir die letzte Unbekannte uns wegdenken, und daher die folgenden Gleichungen aufzulösen haben,

$$\begin{array}{llll}
x + x' + x'' + x''' + x^{\prime\prime\prime\prime} & & = & 1 \\
2x - 3x' & & = & 1 \\
\phantom{x+x'+{}} x'' - x''' + x^{\prime\prime\prime\prime} & & = & 2 \\
\hline
x + x' + x'' & +1 & = & 0 \\
\phantom{x+{}} x' - x'' + 2x''' & -3 & = & 0 \\
\phantom{x+x'+x''+x'''+{}} x^{\prime\prime\prime\prime} & -1 & = & 0
\end{array}$$

Hier ist also die Zahl der Gleichungen um Eins grösser wie die der Unbekannten, und dieses Beispiel hat das Eigenthümliche, dass man aus den Gleichungen sogleich erkennt, dass der Werth $x^{\prime\prime\prime\prime} = 1$ mit unendlich grossem Gewicht daraus hervorgehen muss. Man könnte $x^{\prime\prime\prime\prime}$ sogleich eliminiren, allein um zu zeigen, dass die allgemeine Auflösung die genannten Werthe für $x^{\prime\prime\prime\prime}$ und dessen Gewicht giebt, werde ich diese Elimination nicht ausführen. Setzen wir nun wieder das Gewicht einer jeden der drei ersten Gleichungen $= 1$, so ist die Auflösung durch Hülfe der im vorhergehenden Beispiel erhaltenen Werthe der Hülfsgrössen leicht auszuführen. Die (aa), (ab), etc. $(bb,1)$, etc. behalten dieselben Werthe, nur müssen von denselben alle, die in ihrer Bezeichnung den Buchstaben f enthalten, weggelassen werden. Die Grösse $(ll,6)$ fällt auch weg, und an deren Stelle tritt

$$(ll,5) = 1.4257$$

ein. Von den mit α, β, etc. bezeichneten Hülfsgrössen fallen sowohl die ε, wie die welche den Index fünf haben, mit Ausnahme von χ^{v} weg, endlich fällt auch $\chi^{\prime\prime\prime\prime}$ weg. Man erhält daher sogleich

$$\begin{array}{lll}
y = -0.9107 & \qquad & \pi = 3.3078 \\
y' = -0.9009 & & \pi' = 1.4656 \\
y'' = +1.6930 & & \pi'' = 5.8036 \\
y''' = +1.0000 & & \pi''' = 3.0008 \\
y^{\prime\prime\prime\prime} = +0.4752 & & \pi^{\prime\prime\prime\prime} = 0.8417
\end{array}$$

Für den zweiten Theil der Auflösung bleiben nun die η, $\varkappa$, λ dieselben mit der Ausnahme, dass wieder η^{v}, $\varkappa^{v}$, λ^{v} wegfallen, und es werden daher hier

$F = +0.88113\,,\quad G = -3{,}59404\,,\quad H = -0.52476$ *)

$(\eta\eta) = +0.99014\,,\quad (\varkappa\varkappa) = 0.75248\,,\quad (\lambda\lambda) = 0.84174$

$(\eta\varkappa) = -0.04952\,,\quad (\varkappa\lambda) = +0.19802\,,$

$(\eta\lambda) = +0.03971\,,$

woraus durch die Ausdrücke des Art. 46 die folgenden hervor gehen,

$(\varkappa\varkappa,1) = 0.75000\,,\quad (\lambda\lambda,2) = 0.78681\,,\quad R''' = 17.778$

$(\varkappa\lambda,1) = +0.20001\,,\quad H'' = +0.38660\,,$

$G' = -3.54997\,,$

$\mathfrak{a}' = (8.69908)\,,\quad \mathfrak{b}' = -(8.60320)\,,\quad \mathfrak{c}' = (9.94934)$

$\mathfrak{b}'' = -(9.42599)\,,\quad \mathfrak{c}'' = -(0.67517)$

$\mathfrak{c}''' = (9.69141)$

wo die Logarithmen statt der Zahlen angesetzt sind. Man bekommt ferner

$(\alpha\eta) = +1.25763\,,\quad (\alpha\varkappa) = +0.28711\,,\quad (\alpha\lambda) = +0.97068$

$(\beta\eta) = +0.84172\,,\quad (\beta\varkappa) = +0{,}20790\,,\quad (\beta\lambda) = +0.63390$

$(\gamma\eta) = -1.10921\,,\quad (\gamma\varkappa) = -0.54455\,,\quad (\gamma\lambda) = -1.56490$

$(\delta\eta) = -1.00022\,,\quad (\delta\varkappa) = 0\,,\quad (\delta\lambda) = -1.00015$

$(\varepsilon\eta) = +0.03971\,,\quad (\varepsilon\varkappa) = +0.19802\,,\quad (\varepsilon\lambda) = +0.84174$

$(\alpha\varkappa,1) = +0.35001\,,\quad (\alpha\lambda,2) = +0.82690$

$(\beta\varkappa,1) = +0.25000\,,\quad (\beta\lambda,2) = +0.53347$

$(\gamma\varkappa,1) = -0.60002\,,\quad (\gamma\lambda,2) = -1.36041$

$(\delta\varkappa,1) = -0.05002\,,\quad (\delta\lambda,2) = -0.94669$

$(\varepsilon\varkappa,1) = +0.20001\,,\quad (\varepsilon\lambda,2) = +0.78681$

und hiemit

$z = -0.1313 \qquad \mu = 2.6296$

$z' = -0.1721 \qquad \mu' = 1.1605$

$z'' = +1.1845 \qquad \mu'' = 4.0748$

$z''' = -1.1185 \qquad \mu''' = 2.1527$

$z^{\mathrm{IV}} = -0.5248 \qquad \mu^{\mathrm{IV}} = 0.8417$

woraus

$x = -0.7794$ mit dem Gewicht $= 1.475$

$x' = -0.7288$ » » » $= 3.278$

$x'' = +0.5085$ » » » $= 0.578$

$x''' = +2.1185$ » » » $= 1.179$

$x^{\mathrm{IV}} = +1.0000$ » » » $= \infty$

---

*) Da hier $n - m = 2$, aber demungeachtet alle drei Bedingungsgleichungen mit zur Berechnung von (aa), (ab), etc. gezogen worden sind, so können nicht mehr $F = f$, etc. werden. Auf die Werthe der Unbekannten und ihrer Gewichte ist dieses ganz ohne Einfluss.

hervorgehen. Es ist also, wie voraus gesehen wurde, $x^{IV} = 1$ mit unendlich grossem Gewicht aus der Rechnung hervorgegangen.

Die Ausdrücke des Art. 54 geben jetzt für die Summe der Fehlerquadrate

$$W' = 19{,}204\,, \quad W'' = 11$$

womit

$$W = 8{,}204$$

wird.

58.

Man kann dieses Beispiel auch durch das Verfahren des Art. 29 behandeln, und muss dieselben Resultate erhalten. Die gegebenen Gleichungen führe ich zu diesem Zwecke wieder an

$$\begin{array}{l}
x + x' + x'' + x''' + x^{IV} = 1 \\
2x - 3x' = 1 \\
x'' - x''' + x^{IV} = 2 \\
\hline
x + x' + x'' + 1 = 0 \\
x' - x'' + 2x''' - 3 = 0 \\
x^{IV} - 1 = 0
\end{array}$$

Zur Elimination eignen sich hier x, x', x^{IV}, und diese sind es daher, die man unter den a. a. O. mit $x_{\prime}$, $x_{\prime\prime}$, $x_{\prime\prime\prime}$ bezeichneten Unbekannten verstehen muss. Die vorstehenden Bedingungsgleichungen geben nun

$$\begin{aligned}
x &= -2x'' + 2x''' - 4 \\
x' &= x'' - 2x''' + 3 \\
x^{IV} &= 1
\end{aligned}$$

und die drei ersten Gleichungen werden nach der Elimination dieser

$$\begin{aligned}
x''' &= 1 \\
-7x'' + 10x''' &= 18 \\
x'' - x''' &= 1
\end{aligned}$$

Zufolge der Bezeichnungen des Art. 29 ist also jetzt

$$\begin{array}{lll}
\mathfrak{a} = 0\,, & \mathfrak{b} = 1\,, & \mathfrak{n} = 1 \\
\mathfrak{a}' = -7\,, & \mathfrak{b}' = 10\,, & \mathfrak{n}' = 18 \\
\mathfrak{a}'' = 1\,, & \mathfrak{b}'' = -1\,, & \mathfrak{n}'' = 1
\end{array}$$

und hiemit werden, da fortwährend $p = p' = p'' = 1$ sind,

$$(\mathfrak{aa}) = 50\,,\quad (\mathfrak{ab}) = -71\,,\quad (\mathfrak{an}) = -125$$
$$(\mathfrak{bb}) = 102\,,\quad (\mathfrak{bn}) = 180$$

weshalb die aufzulösenden Gleichungen

$$50x'' - 71x''' = -125$$
$$-71x'' + 102x''' = 180$$

sind. Löst man diese unbestimmt auf, indem man die rechten Seiten derselben bez. mit α und β bezeichnet, so bekommt man

$$x'' = \frac{102}{59}\alpha + \frac{71}{59}\beta$$
$$x''' = \frac{71}{59}\alpha + \frac{50}{59}\beta$$

und es wird also in der Bezeichnung des Art. 30

$$(I, I) = \frac{102}{59}\,,\quad (I, II) = \frac{71}{59}$$
$$(II, II) = \frac{50}{59}$$

Die vorstehenden Gleichungen geben nun

$$x'' = \frac{80}{59} \text{ mit dem Gewicht } = \frac{59}{102}$$
$$x''' = \frac{125}{59} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad = \frac{59}{50}$$

und substituirt man diese Werthe von x'' und x''' in die obigen Gleichungen für x, x', x^{IV}, so ergiebt sich

$$x = -\frac{46}{59}\,,\quad x' = -\frac{42}{59}\,,\quad x^{IV} = 1$$

Für die Gewichte dieser drei Bestimmungen erhält man durch Vergleichung der Gleichungen (26) mit den obigen für x, x', x^{IV} zuerst

$$\mu = -2\,,\quad \nu = +2$$
$$\mu' = +1\,,\quad \nu' = -2$$
$$\mu'' = 0\,,\quad \nu'' = 0$$

es wird also zufolge des Art. 30

$$\frac{1}{P} = 4(I,I) - 8(I,II) + 4(II,II)$$
$$\frac{1}{P'} = (I,I) - 4(I,II) + 4(II,II)$$
$$\frac{1}{P^{IV}} = 0$$

und nach der Substitution

$$P = \frac{59}{40}\,,\quad P' = \frac{59}{18}\,,\quad P^{IV} = \infty$$

Verwandelt man die hier in rationalen Brüchen gefundenen Resultate in Decimalbrüche, so wird man mit den Resultaten des vor. Art. vollständige Uebereinstimmung finden.

Substituirt man die hier erhaltenen Werthe der Unbekannten in die drei ersten der gegebenen Gleichungen, so sind die übrig bleibenden Fehler

$$+\frac{66}{59}, \quad -\frac{22}{59}, \quad -\frac{154}{59}$$

und folglich die Summe ihrer Ausdrücke, oder

$$W = \frac{28556}{(59)^2} = 8.203$$

auch mit dem vor. Art. übereinstimmend.

59.

Das Beispiel soll noch so geändert werden, dass ausser x^{v} auch x^{iv} und x''' weggelassen werden. Die gegebenen Gleichungen sind also jetzt

$$\begin{array}{rl} x + x' + x'' & = 1 \\ 2x - 3x' & = 1 \\ x'' & = 2 \\ \hline x + x' + x'' + 1 & = 0 \\ x' - x'' - 3 & = 0 \end{array}$$

Da hier $m = n$ ist, so können die Hülfsgrössen (aa), (ab), etc. ohne Zuziehung der Coefficienten der Bedingungsgleichungen berechnet werden, aber die Zuziehung dieser letzteren kann das Resultat nicht im Geringsten ändern, und um dieses zu zeigen soll hier die Auflösung auf beide Arten durchgeführt werden. Ziehen wir nun zuerst die Coefficienten der Bedingungsgleichungen hinzu, so bleiben die ersten Hülfsgrössen dieselben wie vorher, und können aus dem Vorhergehenden entnommen werden; sie sollen zu mehrerer Deutlichkeit hier wiederholt werden.

$$\begin{array}{llll} (aa) = 6, & (ab) = -4, & (ac) = 2, & (al) = 3 \\ & (bb) = 12, & (bc) = 1, & (bl) = -2 \\ & & (cc) = 4, & (cl) = 3 \\ & & & (ll) = 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} (bb,1) = 9.3333, & (bc,1) = 2.3333, & (bl,1) = 0 \\ & (cc,2) = 2.7500, & (cl,2) = 2 \\ & & (ll,3) = 3.0454 \end{array}$$

$$\alpha' = (9.82391)\,, \quad \beta' = -(9.52288)\,, \quad \chi' = -(9.69897)$$
$$\beta'' = -(9.39793)\,, \quad \chi'' = 0$$
$$\chi''' = -(9\ 68170)$$
$$\alpha'' = -(9.69897)$$

woraus

$$\eta = +0.1364 \qquad \pi = 0.3052$$
$$\eta' = -0.1818 \qquad \pi' = 0.1299$$
$$\eta'' = +0.7273 \qquad \pi'' = 0.3637$$

folgen. Ferner werden

$$y = 1\,, \qquad \varkappa = 0$$
$$y' = 1.6667\,, \qquad \varkappa' = 1$$
$$y'' = 0.2500\,, \qquad \varkappa'' = -1.2500$$
$$F = +1.6818\,, \qquad G = -3.9091$$

$$(\eta\eta) = 0.48701\,, \qquad (\eta\varkappa) = 0.06493$$
$$(\varkappa\varkappa) = 0.67533$$
$$(\varkappa\varkappa,1) = 0.66667\,, \qquad R' = +\ 5.808$$
$$R'' = 31.435$$
$$\mathfrak{a}' = -(9.12491)\,, \qquad \mathfrak{x}' = (0.53824)$$
$$\mathfrak{x}'' = -\ (0.79239)$$

$$(\alpha\eta) = 0.24025\,, \qquad (\alpha\varkappa) = 0.29870$$
$$(\beta\eta) = 0.15584\,, \qquad (\beta\varkappa) = 0.22077$$
$$(\gamma\eta) = 0.09091\,, \qquad (\gamma\varkappa) = -0.45455$$
$$(\alpha\varkappa,1) = 0.26667$$
$$(\beta\varkappa,1) = 0.20000$$
$$(\gamma\varkappa,1) = -0.46667$$

woraus

$$z = -0.8237 \qquad \mu = 0.2252$$
$$z' = -0.7018 \qquad \mu' = 0.1099$$
$$z'' = 3.2073 \qquad \mu'' = 0.3437$$

und

$$x = 0.9601 \text{ mit dem Gewicht } = 12.50$$
$$x' = 0.5200 \quad » \quad » \quad » \quad = 50.00$$
$$x'' = -2.4800 \quad » \quad » \quad » \quad = 50.00$$

hervor gehen. Es wird ausserdem

$$W' = 34.480\,, \quad W'' = 10$$

woraus man

$$W' = 24.480$$

bekommt.

60.

Nehmen wir nun wieder dieselben Gleichungen vor, nemlich

$$\begin{aligned} x + x' + x'' &= 1 \\ 2x - 3x' &= 1 \\ x'' &= 2 \\ \hline x + x' + x'' + 1 &= 0 \\ x' - x'' - 3 &= 0 \end{aligned}$$

und lassen bei der Berechnung der Hülfsgrössen (aa), (ab), etc. die Coefficienten der Bedingungsgleichungen weg. Hiemit werden

$$\begin{array}{llll} (aa) = 5, & (ab) = -5, & (ac) = 1, & (al) = 3 \\ & (bb) = 10, & (bc) = 1, & (bl) = -2 \\ & & (cc) = 2, & (cl) = 3 \\ & & & (ll) = 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} (bb,1) = 5, & (bc,1) = 2, & (bl,1) = 1 \\ & (cc,2) = 1, & (cl,2) = 2 \\ & & (ll,3) = 0 \end{array}$$

$$\alpha' = 1, \quad \beta = -\frac{1}{5}, \quad \alpha'' = -\frac{3}{5}, \quad \beta'' = -\frac{2}{5}$$

$$\begin{array}{ll} y = -\frac{2}{5} & \pi = \frac{19}{25} \\ y' = -\frac{3}{5} & \pi' = \frac{9}{25} \\ y'' = 2 & \pi'' = 1 \end{array}$$

ferner

$$\begin{array}{ll} \eta = 1, & \varkappa = 0 \\ \eta' = 2, & \varkappa' = 1 \\ \eta'' = 0, & \varkappa'' = -\frac{7}{5} \end{array}$$

$$(\eta\eta) = 1, \quad (\eta\varkappa) = \frac{2}{5}, \quad F = 2$$

$$(\varkappa\varkappa) = \frac{54}{25}, \quad G = -\frac{28}{5}$$

$$(\varkappa\varkappa,1) = 2, \quad G' = -\frac{32}{5}$$

$$R' = \frac{612}{25}$$

$$\mathfrak{a}' = -\frac{2}{5}, \quad \mathfrak{x}' = 2, \quad \mathfrak{x}'' = -\frac{16}{5}$$

Ferner

$$(\alpha\eta) = \frac{3}{5}\,,\ (\alpha\varkappa) = \frac{26}{25}\,,\ (\alpha\varkappa, 1) = \frac{4}{5}$$

$$(\beta\eta) = \frac{2}{5}\,,\ (\beta\varkappa) = \frac{19}{25}\,,\ (\beta\varkappa, 1) = \frac{3}{5}$$

$$(\gamma\eta) = 0\,,\ (\gamma\varkappa) = -\frac{7}{5}\,,\ (\gamma\varkappa, 1) = -\frac{7}{5}$$

$$z = -\frac{34}{25}\,,\qquad \mu = \frac{17}{25}$$

$$z' = -\frac{28}{25}\,,\qquad \mu' = \frac{17}{50}$$

$$z'' = \frac{112}{25}\,,\qquad \mu'' = \frac{49}{50}$$

also

$$x = \frac{24}{25} \text{ mit dem Gewicht } = \frac{25}{2}$$

$$x' = \frac{13}{25} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad = 50$$

$$x'' = -\frac{62}{25} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad = 50$$

$$W = W' = \frac{612}{25}$$

mit den im vor. Art. erhaltenen Resultaten völlig übereinstimmend.

61.

In dem eben behandelten Beispiel findet noch ein Umstand statt, welcher Beachtung verdient. Die erste durch Beobachtungen gegebene Gleichung ist, abgesehen vom völlig bekannten Gliede, mit der ersten Bedingungsgleichung identisch, so dass in der That von den fünf gegebenen Gleichungen nur vier von einander wesentlich verschieden sind. Es ist von Interesse, zu erfahren welchen Einfluss dieser Umstand auf das Resultat hat, und diesen zeigt die Methode des Art. 29 am Einfachsten, weshalb ich dasselbe Beispiel auch nach dieser Methode behandeln werde. Die Gleichungen sind wieder

$$\begin{aligned} x + x' + x'' &= 1 \\ 2x - 3x' &= 1 \\ x'' &= 2 \\ \hline x + x' + x'' + 1 &= 0 \\ x' - x'' - 3 &= 0 \end{aligned}$$

Die beiden letzten Gleichungen geben

$$\begin{aligned} x &= -2x'' - 4 \\ x' &= x'' + 3 \end{aligned}$$

Eliminirt man hiemit x und x' aus den drei ersten, so bekommt man

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \\ -7x'' &= 18 \\ x'' &= 2 \end{aligned}$$

folglich nachdem man mit den Coefficienten von x'' multiplicirt, und addirt hat,

$$x'' = -\frac{62}{25}$$

und durch die Substitution dieses Werthes in die Gleichungen für x und x'

$$x = \frac{24}{25}, \quad x' = \frac{18}{25}$$

mit den vorher erhaltenen Werthen identisch, und dasselbe findet man auch in Bezug auf die Gewichte. Man erkennt aus dieser Auflösung, dass die Methode von selbst die Gleichung, die in den übrigen enthalten ist, ausschliesst und unberücksichtigt lässt, und so wird es in allen ähnlichen Fällen stattfinden. Nehmen wir um einen zusammengesetzteren Fall herbei zu führen

$$x + 3x' - x'' = 5$$

statt der vorherigen ersten Gleichung an, so findet sich durch die Elimination

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \\ -7x'' &= 18 \\ x'' &= 2 \end{aligned}$$

woraus wieder für die Unbekannten und deren Gewichte dieselben Werthe hervorgehen wie vorher. Die obige Gleichung, deren Wirkung durch die Methode annullirt worden ist, ist wieder in den beiden Bedingungsgleichungen enthalten, und entsteht, wenn man das Doppelte der zweiten zur ersten addirt.

62.

Dass auch die zweite Methode dieselbe Eigenschaft besitzt, lässt sich leicht dadurch zeigen, dass man sie mit Weglassung der ersten gegebenen Gleichung auf die übrigen anwendet. Seien daher jetzt

$$\begin{aligned} 2x - 3x' \qquad &= 1 \\ x'' &= 2 \\ \hline x + x' + x'' + 1 &= 0 \\ x' - x'' - 3 &= 0 \end{aligned}$$

durch diese Methode zu behandeln. Hier wird, wenn man die erste Bedingungsgleichung zur Bildung der ersten Hülfsgrössen zuzieht, da jetzt $n - m = 1$ ist,

$$\begin{array}{llll} (aa) = 5\,, & (ab) = -5\,, & (ac) = 1\,, & (al) = 2 \\ & (bb) = 10\,, & (bc) = 1\,, & (bl) = -2 \\ & & (cc) = 2\,, & (cl) = 2 \\ & & & (ll) = 5 \end{array}$$

wo blos die Grössen die l enthalten von denen des Art. 60 verschieden sind. Ferner

$$\begin{array}{lll} (bb,1) = 5\,, & (bc,1) = 2\,, & (bl,1) = -1 \\ & (cc,2) = 1\,, & (cl,2) = 2 \\ & & (ll,3) = 0 \end{array}$$

$$\alpha' = 1\,, \quad \beta' = -\frac{1}{5}\,, \quad \beta'' = -\frac{2}{5}\,, \quad \alpha'' = -\frac{3}{5}$$

wo alle Grössen mit denen des Art. 60 übereinstimmen. Hieraus folgt

$$\begin{array}{ll} y = -1 & \pi = \frac{19}{25} \\ y' = -1 & \pi' = \frac{9}{25} \\ y'' = 2 & \pi'' = 1 \end{array}$$

wo wieder die π mit dem Art. 60 übereinstimmen. Ferner

$$\begin{array}{ll} \eta = 1 & \varkappa = 0 \\ \eta' = 2 & \varkappa' = 1 \\ \eta'' = 0 & \varkappa'' = -\frac{7}{5} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} (\eta\eta) = 1\,, & (\eta\varkappa) = \frac{2}{5}\,, & F = 1 \\ & (\varkappa\varkappa) = \frac{54}{25}\,, & G = -6 \\ (\varkappa\varkappa,1) = 2\,, & G' = -\frac{32}{5} & \\ & R'' = \frac{537}{25} & \end{array}$$

$$\mathfrak{a}' = -\frac{2}{5}\,, \quad \mathfrak{k}' = 1\,, \quad \mathfrak{k}'' = -\frac{16}{5}$$

ferner

$$\begin{array}{lll} (\alpha\eta) = \frac{3}{5}\,, & (\alpha\varkappa) = \frac{26}{25}\,, & (\alpha\varkappa,1) = \frac{4}{5} \\ (\beta\eta) = \frac{2}{5}\,, & (\beta\varkappa) = \frac{19}{25}\,, & (\beta\varkappa,1) = \frac{3}{5} \\ (\gamma\eta) = 0\,, & (\gamma\varkappa) = -\frac{7}{5}\,, & (\gamma\varkappa,1) = -\frac{7}{5} \end{array}$$

wie im Art. 60, mit Ausnahme von F, G, und den davon abhängigen Grössen. Hiemit werden

$$z = -\frac{49}{25} \qquad \mu = \frac{17}{25}$$
$$z' = -\frac{88}{25} \qquad \mu' = \frac{17}{50}$$
$$z'' = \frac{112}{25} \qquad \mu'' = \frac{49}{50}$$

woraus wieder dieselben Werthe der Unbekannten und der Gewichte derselben hervorgehen wie vorher. Die Summe der Fehlerquadrate wird jetzt etwas anders, weil die weggelassene erste Gleichung nicht mehr mitzählt. Man bekommt

$$W' = \frac{587}{25}\,, \quad W'' = 1$$

woraus

$$W = \frac{612}{25}$$

folgt.

63.

Um das Beispiel möglichst zu erschöpfen will ich schliesslich dieselben Gleichungen wieder mit der Veränderung vornehmen, dass die zweite Bedingungsgleichung mit zur Berechnung der (aa), (ab), etc. gezogen werden soll. Hiemit wird

$$\begin{array}{llll} (aa) = 4\,, & (ab) = -6\,, & (ac) = 0\,, & (al) = 2 \\ & (bb) = 10\,, & (bc) = -1\,, & (bl) = -3 \\ & & (cc) = 2\,, & (cl) = 2 \\ & & & (ll) = 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} (bb,1) = 1\,, & (bc,1) = -1\,, & (bl,1) = 0 \\ & (cc,2) = 1\,, & (cl,2) = 2 \\ & & (ll,3) = 0 \end{array}$$

$$\alpha' = \frac{3}{2}\,, \quad \beta' = 0\,, \quad \beta'' = 1\,, \quad \alpha'' = \frac{3}{2}$$

woraus

$$y = \frac{7}{2} \qquad \pi = \frac{19}{4}$$
$$y' = 2 \qquad \pi' = 2$$
$$y'' = 2 \qquad \pi'' = 1$$

folgen. Ferner

$$\eta = 1 \qquad \varkappa = 0$$
$$\eta' = \frac{5}{2} \qquad \varkappa' = 1$$
$$\eta'' = \frac{7}{2} \qquad \varkappa'' = 0$$

$$(\eta\eta) = \frac{75}{4}, \quad (\eta\varkappa) = \frac{5}{2}, \quad F = \frac{17}{2}$$

$$(\varkappa\varkappa) = 1, \quad G = -3$$

$$(\varkappa\varkappa, 1) = \frac{2}{3}, \quad G' = -\frac{62}{15}$$

$$R'' = \frac{737}{25}$$

$$\alpha' = -\frac{2}{15}, \quad \mathfrak{z}' = \frac{84}{75}, \quad \mathfrak{z}'' = -\frac{21}{5}$$

$$(\alpha\eta) = \frac{27}{4}, \quad (\alpha\varkappa) = \frac{3}{2}, \quad (\alpha\varkappa, 1) = \frac{4}{15}$$

$$(\beta\eta) = 6, \quad (\beta\varkappa) = 1, \quad (\beta\varkappa, 1) = \frac{1}{5}$$

$$(\gamma\eta) = \frac{7}{2}, \quad (\gamma\varkappa) = 0, \quad (\gamma\varkappa, 1) = -\frac{7}{15}$$

$$z = \frac{127}{50} \qquad \mu = \frac{467}{100}$$

$$z' = \frac{37}{25} \qquad \mu' = \frac{99}{50}$$

$$z'' = \frac{112}{25} \qquad \mu'' = \frac{49}{50}$$

woraus wieder dieselben Werthe der Unbekannten und der Gewichte hervorgehen wie vorher. Für die Summe der Fehlerquadrate wird jetzt

$$W' = \frac{737}{25}, \quad W'' = 9$$

also

$$W = \frac{512}{25}$$

wie im vor. Art.

Ich habe ehe ich weiter gehe hier noch eine Bemerkung einzuschalten. Wenn man die zwei Verfahrungsarten, die für die Auflösung der allgemeinen Aufgabe in dieser Abhandlung entwickelt worden sind, in ihrer Anwendung auf das eben behandelte Beispiel betrachtet, so scheint es, dass die Auflösung des Art. 29 auf geringere Arbeit führt, wie die später entwickelte. In der That hat im vorstehenden Beispiel jene Auflösung auf eine kürzere Rechnung geführt wie diese. Aber dieses findet nur in so einfachen Fällen, wie der, den dieses Beispiel darbietet, statt. In der Anwendung auf Fälle, in welchen die Zahl der Unbekannten und der Bedingungsgleichungen grösser ist, und die Coefficienten keine so einfache Zahlen sind wie hier, sondern aus Decimalbrüchen ohne Ende bestehen, ist die Sache eine andere. In solchen Fällen ist die zweite Auflösung im Allgemeinen diejenige, welche geringere Arbeit verursacht, und nur in besonderen Fällen, namentlich in solchen, wo die Elimination der mit $x_{,}$, $x_{,,}$, etc. bezeichneten Grössen leicht bewerkstelligt werden kann, die erste Auflösung vorzuziehen.

§. 4. Anwendung der eben gelösten Aufgabe auf die Geodäsie, unter der Bedingung, dass nur Eine Grundlinie gemessen worden ist.

a) Erstes Verfahren.

64.

Wir kommen jetzt zur Anwendung der im Vorhergehenden ausgeführten Auflösung auf die Geodäsie. Zwar ist von derselben schon im Art. 55 durch ihre Hinführung auf die Gaussische Aufgabe des »Supplementum theoriae combinationis etc.« eine geodätische Anwendung gegeben worden, allein diese ist nicht immer anwendbar, indem Umstände eintreten können, die einer allgemeineren Aufgabe angehören.

Es wird jetzt angenommen, dass in einem Dreiecksnetze eine grössere Anzahl von Winkeln gemessen worden seien, wie diejenige, die mit der Zuziehung Einer Dreiecksseite hinreichend und nöthig ist um dieses Dreiecksnetz zu bestimmen, und nach der Ausgleichung der Messungen gefragt, durch welche die wahrscheinlichsten Werthe derselben hervorgehen. In Bezug auf die Messungen selbst soll zuerst angenommen werden, dass man nicht die Winkel für sich, sondern die Richtungen, die die Schenkel der Winkel bilden, unmittelbar eingeschnitten habe*). Man wird weiter unten sehen, dass jener Fall sich mit Vortheil für die Abkürzung der Rechnungen auf diesen hinführen lässt. Das Verfahren bei den Messungen, welches der nun zu entwickelnden Anwendung der allgemeinen Aufgabe zu Grunde liegend gedacht wird, ist daher das folgende.

Nachdem auf irgend einer Station, die zugleich einen Dreieckspunkt bildet, der Theodolit aufgestellt und nivellirt worden ist, stelle man bei unverändert gelassenem Kreise desselben die übrigen Dreieckspunkte, in so weit sie sichtbar sind, durch blose Bewegung der Alhidade in das Fernrohr ein, lese nach jeder Einstellung die Mikroscope oder die Nonien des Theodoliten ab, und notire die Ablesungen. Hierauf drehe man den Kreis des Theodoliten um einen beliebigen Bogen, und wiederhole dasselbe Verfahren, welches fortzusetzen ist, bis die vor-

---

*) Die Messung der Richtungen statt der Winkel selbst ist, so viel ich weiss, zuerst von W. Strube angegeben und angewandt worden. S. Schum. Astr. Nachr. B. II. p. 431 u. f.

bestimmte Anzahl von Einstellungen eines jeden Dreieckspunkts erlangt ist. Eine jede solche Reihe von Einstellungen nenne ich einen Gyrus (gyrus horizontis). Die zufällige Beschaffenheit der Atmosphäre und auch andere Umstände können bewirken, dass nicht jeder Gyrus alle einzuschneidenden Punkte enthält, und wenn deren viele vorhanden sind, so wird man jedenfalls nicht Alle in jeden Gyrus aufnehmen, weil dadurch bewirkt werden würde, dass man sich zu lange auf den unveränderten Stand des Theodoliten verlassen müsste. Man wird im letztgenannten Falle für jeden Gyrus ein Maximum von Einstellungen festsetzen, und die in jedem Gyrus einzuschneidenden Punkte so auswählen, dass möglichst viele verschiedene Combinationen derselben vorkommen. Man wird ferner die verschiedenen Gruppen, in die man zu diesem Zwecke alle einzuschneidenden Punkte getheilt hat, mehrmals einschneiden, so dass von jeder derselben eine zweckmässige Anzahl von Gyris erhalten wird.

65.

Indem wir nun zur Anwendung unserer Aufgabe auf diese Messungen übergehen, ist zuerst zu erwägen, dass jeder Gyrus einen verschiedenen, beliebigen Anfangspunkt hat, und dass daher allen Einstellungen eines jeden Gyrus eine beliebige Zahl zugefügt, oder eine solche von denselben abgezogen werden darf. Die zweckmässigste Wahl dieser Zahlen ist die, welche bewirkt, dass alle in den verschiedenen Gyris erhaltenen Werthe der Richtungen eines und desselben Gegenstandes einander nahe gleich werden, und zugleich nahe die Azimuthe aller Punkte repräsentiren. Man kann hierauf noch einen Schritt weiter gehen, und für jede Richtung, oder jedes Azimuth, einen beliebigen genäherten Werth, der sich von selbst durch die erhaltenen Beobachtungen darbietet, abziehen, so dass hierauf alle der weiteren Berechnung zu unterwerfenden, durch die Beobachtungen erhaltenen Zahlenwerthe kleine Grössen werden, ja man kann durch dieses Verfahren bewirken, dass in einer Anzahl von Gyris alle diese Zahlenwerthe Null werden. Bezeichnen wir nun die auf diese Art durch die Beobachtungen erlangten Zahlenwerthe des ersten Gyrus mit l, l', l'', etc., die mit Uebergehung der Bedingungsgleichungen den angenommenen Werthen der Richtungen zuzufügenden, wahrscheinlichsten Verbesserungen mit

x, x', x'', etc., und die wahrscheinlichste Verbesserung des angenommenen gemeinschaftlichen Anfangspunkts dieses Gyrus mit u, so giebt dieser erste Gyrus die folgenden Gleichungen

(53) . $x + u = l$, $x' + u = l'$, $x'' + u = l''$, etc.

Seien die Gewichte dieser Beobachtungen

$$p, \quad p', \quad p'', \text{ etc.}$$

Im zweiten Gyrus habe man auf gleiche Weise die Zahlenwerthe derselben Richtungen $l_{,}$, $l'_{,}$, $l''_{,}$, etc. erhalten, bezeichnet man hierauf mit $u_{,}$ die wahrscheinlichste Verbesserung des angenommenen gemeinschaftlichen Anfangspunkts dieses Gyrus, so giebt derselbe die Gleichungen

(54) . $x + u_{,} = l_{,}$, $x' + u_{,} = l'_{,}$, $x'' + u_{,} = l''_{,}$, etc.

Seien die Gewichte dieser Beobachtungen

$$p_{,}, \quad p'_{,}, \quad p''_{,}, \text{ etc.}$$

Durch einen dritten Gyrus bekommt man ebenso

(55) . $x + u_{,,} = l_{,,}$, $x' + u_{,,} = l'_{,,}$, $x'' + u_{,,} = l''_{,,}$, etc.

mit den Gewichten

$$p_{,,}, \quad p'_{,,}, \quad p''_{,,}, \text{ etc.}$$

und jeder folgende Gyrus giebt ähnliche Gleichungen. Diese sind die Gleichungen (29) unserer gegenwärtigen Aufgabe, in so weit nur Eine Station betrachtet wird. Jede andere Station, auf welcher beobachtet worden ist, liefert ähnliche Gleichungen, in welchen aber andere Unbekannten vorkommen, die in so ferne man nur zuerst den ersten Theil der Auflösung betrachtet, von jenen unabhängig sind. In Bezug auf den ersten Theil der Auflösung können also die Beobachtungen einer jeden Station unabhängig von denen aller übrigen Stationen berechnet werden. Es zerfallen, mit anderen Worten, in der gegenwärtigen Aufgabe die allgemeinen Gleichungen (29) in so viele von einander abgesonderte Systeme wie Stationen vorhanden sind.

66.

Die vorstehenden Gleichungen, in welchen x, x', x'', etc. und u, $u_{,}$, $u_{,,}$, etc. die Unbekannten sind, wären jetzt nach den Vorschriften der Artt. 42, 43, 44 zu behandeln, und da ihre Anzahl immer wenigstens eben so gross ist, wie die der Unbekannten, so brauchen in der gegenwärtigen Aufgabe zur Berechnung der Grössen (aa), (ab), etc. die Coeffi-

cienten der Bedingungsgleichungen, die sich aus dem Dreiecksnetz im Ganzen betrachtet ergeben, nie hinzugezogen zu werden. Es tritt jedoch hier ein Umstand ein, der eine Abweichung vom allgemeinen Verfahren bedingt, und dieser besteht darin, dass aus den eben aufgestellten Gleichungen, in wie grosser Anzahl sie auch vorhanden sein mögen, nie alle Unbekannten bestimmt werden können, sondern immer Eine derselben unbestimmt bleibt. Dieses hat seinen Grund darin, dass der Anfangspunkt der Richtungen willkührlich ist, und folglich x, x', x'', etc. an sich unbestimmte Grössen sind, von welchen nur die Unterschiede (die Winkel, die daraus hervorgehen) bestimmte Werthe bekommen.

Da eine der Unbekannten willkührlich ist, so kann man zwischen allen Unbekannten, oder einem Theil derselben eine beliebige Bedingungsgleichung aufstellen*), und diese so einrichten, dass man geschmeidige Endformeln bekommt. Sei diese Bedingungsgleichung

$$\begin{aligned}\theta = Hu + Ju_{,} + Ku_{,,} + \ldots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56)\\ + H'x + J'x' + K'x'' + \ldots\end{aligned}$$

wo vorläufig θ, H, J, K, etc. H', J', K', etc. unbestimmte Grössen sind.

67.

Wir könnten nun die allgemeine Auflösung unmittelbar auf die im Vorhergehenden aufgestellten Gleichungen anwenden, müssten aber dabei auch auf den zweiten Theil derselben Rücksicht nehmen, weil eine Bedingungsgleichung eingeführt worden ist. Theils um letzteres zu vermeiden, und theils um die Unbekannten u, $u_{,}$, $u_{,,}$, etc. zu eliminiren, die weiter nicht gebraucht werden, ziehe ich vor den ersten Theil der Auflösung a priori in Bezug auf die aufgestellten Gleichungen durchzuführen. Es ist aus dem Vorhergehenden klar, dass dieser darin besteht, die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten in der Annahme zu suchen, dass in der Aufgabe die zu lösen ist, nur die Bedingungsgleichung (56) vorhanden sei, die Werthe der Unbekannten, die man dadurch erhält, sind die, welche im Art. 44 mit y, y', y'', etc. bezeichnet wurden; der zweite Theil der Auflösung bleibt hierauf derselbe wie im Vorhergehenden.

*) S. Schum. Astr. Nachr. B. XVI. Nr. 362.

Das leitende Princip, welches wir hier anzuwenden haben, besteht wieder darin, dass die Summe der mit ihren Gewichten multiplicirten Quadrate der übrigbleibenden Fehler ein Minimum werden muss, während die Gleichung (56) vollständig erfüllt wird. Bezeichnet nun ψ einen unbestimmten Factor, so muss in Folge der Gleichungen (53) bis (56) die folgende Function

$$\begin{aligned}
& p(x+u-l)^2 + p'(x'+u-l')^2 + p''(x''+u-l'')^2 + \ldots \\
& + p_{,}(x+u_{,}-l_{,})^2 + p_{,}'(x'+u_{,}-l_{,}')^2 + p_{,}''(x''+u_{,}-l_{,}'')^2 + \ldots \\
& + p_{,,}(x+u_{,,}-l_{,,})^2 + p_{,,}'(x'+u_{,,}-l_{,,}')^2 + p_{,,}''(x''+u_{,,}-l_{,,}'')^2 + \ldots \\
& + \text{etc.} \\
& - 2\psi(Hu + Ju_{,} + Ku_{,,} + \ldots + H'x + J'x' + K'x'' + \ldots - \theta)
\end{aligned}$$

ein absolutes Minimum werden und diese Bedingung giebt sogleich die folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned}
px + p'x' + p''x'' + \ldots + Pu &= (lu) + H\psi \\
p_{,}x + p_{,}'x' + p_{,}''x'' + \ldots + P_{,}u_{,} &= (lu_{,}) + J\psi \\
p_{,,}x + p_{,,}'x' + p_{,,}''x'' + \ldots + P_{,,}u_{,,} &= (lu_{,,}) + K\psi \\
\text{etc.} \qquad & \qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Qx + pu + p_{,}u_{,} + p_{,,}u_{,,} + \ldots\ldots &= (lx) + H'\psi \\
Q'x' + p'u + p_{,}'u_{,} + p_{,,}'u_{,,} + \ldots\ldots &= (lx') + J'\psi \\
Q''x'' + p''u + p_{,}''u_{,} + p_{,,}''u_{,,} + \ldots\ldots &= (lx'') + K'\psi \\
\text{etc.} \qquad & \qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

in welchen zur Abkürzung

$$\begin{aligned}
P &= p + p' + p'' + \ldots \\
P_{,} &= p_{,} + p_{,}' + p_{,}'' + \ldots \\
P_{,,} &= p_{,,} + p_{,,}' + p_{,,}'' + \ldots \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q &= p + p_{,} + p_{,,} + \ldots \\
Q' &= p' + p_{,}' + p_{,,}' + \ldots \\
Q'' &= p'' + p_{,}'' + p_{,,}'' + \ldots \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(lu) &= pl + p'l' + p''l'' + \ldots \\
(lu_{,}) &= p_{,}l_{,} + p_{,}'l_{,}' + p_{,}''l_{,}'' + \ldots \\
(lu_{,,}) &= p_{,,}l_{,,} + p_{,,}'l_{,,}' + p_{,,}''l_{,,}'' + \ldots \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(lx) &= pl + p_{,}l_{,} + p_{,,}l_{,,} + \ldots \\
(lx') &= p'l' + p_{,}'l_{,}' + p_{,,}'l_{,,}' + \ldots \\
(lx'') &= p''l'' + p_{,}''l_{,}'' + p_{,,}''l_{,,}'' + \ldots \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

gesetzt worden sind. Die Bedeutung dieser Summen kann einfach mit Worten ausgedrückt werden.

P ist die Summe der Gewichte aller Beobachtungen des ersten Gyrus,
$P_{,}$ . . . . zweiten Gyrus,
$P_{,,}$ . . . . dritten Gyrus,
u. s. w.

Q ist die Summe der Gewichte aller für die Richtung x vorhandenen Beobachtungen,
Q' . . . . x' . . . . .
Q'' . . . . x'' . . . . .
u. s. w.

(lu) ist die Summe der mit ihren Gewichten multiplicirten, beobachteten Werthe im ersten Gyrus,
$(lu_{,})$ . . . . im zweiten Gyrus,
$(lu_{,,})$ . . . . im dritten Gyrus,
u. s. w.

(lx) ist die Summe der mit ihren Gewichten multiplicirten, für x erhaltenen Werthe,
(lx') . . . . x' . .
(lx'') . . . . x'' . .
u. s. w. Diesen Bedeutungen zufolge können diese Summen leicht, und ohne Irrthum befürchten zu müssen, berechnet werden.

68.

Ehe ich weiter gehe will ich auf eine wesentliche Vereinfachung aufmerksam machen, deren die Ausdrücke des vor. Art. fähig sind, und diese einführen.

»Man kann immer auf einfache Weise bewirken, dass alle mit (lu), $(lu_{,})$, $(lu_{,,})$, etc. bezeichneten Summen Null werden.«

Dem Vorhergehenden zufolge ist der gemeinschaftliche Anfangspunkt aller Richtungen eines jeden Gyrus völlig willkührlich, bezeichnet man daher mit m irgend eine beliebige Zahl, dann ist z. B. der Ausdruck für (lu) nicht nur der im vor. Art. angegebene, sondern es ist auch

$$(lu) = p(l-m) + p'(l'-m) + p''(l''-m) + \ldots$$

bestimmt man aber nun m so dass

$$m = \frac{p}{P}\,l + \frac{p'}{P}\,l' + \frac{p''}{P}\,l'' + \ldots$$

wird, so ergiebt sich sogleich

$$(lu) = 0$$

und da man dieses Verfahren auf die Beobachtungen eines jeden Gyrus anwenden kann, so kann man auch $(lu_{,})$, $(lu_{,,})$, etc. gleich Null machen. W. z. b. w.

Wenn, wie am häufigsten der Fall ist, die Gewichte der Beobachtungen des betreffenden Gyrus einander gleich gesetzt werden können, so wird m gleich dem arithmetischen Mittel aller l dieses Gyrus.

Führen wir nun die obige Bestimmung in die Gleichungen des vor. Art. ein, dann sind zuerst auf die eben erklärte Art

$$\begin{array}{lll} p(l-m)\,, & p'(l'-m)\,, & p''(l''-m)\,, \\ p_{,}(l_{,}-m_{,})\,, & p_{,}'(l_{,}'-m_{,})\,, & p_{,}''(l_{,}''-m_{,})\,, \\ p_{,,}(l_{,,}-m_{,,})\,, & p_{,,}'(l_{,,}'-m_{,,})\,, & p_{,,}''(l_{,,}''-m_{,,})\,, \end{array}$$

etc. zu berechnen, und diese statt pl, $p'l'$, etc. $p_{,}l_{,}$, etc. etc. anzusetzen, worauf die Gleichungen

$$(57)\quad . \left\{\begin{array}{l} px + p'x' + p''x'' + \ldots + Pu = H\psi \\ p_{,}x + p_{,}'x' + p_{,}''x'' + \ldots + P_{,}u_{,} = J\psi \\ p_{,,}x + p_{,,}'x' + p_{,,}''x'' + \ldots + P_{,,}u_{,,} = K\psi \\ \text{etc.} \end{array}\right.$$

$$(58)\quad . \left\{\begin{array}{l} Qx + pu + p_{,}u_{,} + p_{,,}u_{,,} + \ldots . = (lx) + H'\psi \\ Q'x' + p'u + p_{,}'u_{,} + p_{,,}'u_{,,} + \ldots . = (lx') + J'\psi \\ Q''x'' + p''u + p_{,}''u_{,} + p_{,,}''u_{,,} + \ldots . = (lx'') + K'\psi \\ \text{etc.} \end{array}\right.$$

zur Bestimmung der Unbekannten u, $u_{,}$, $u_{,,}$, etc. x, x', x'', etc. dienen. Es kann noch bemerkt werden, dass jetzt die Bedingungsgleichungen

$$P + P_{,} + P_{,,} + \ldots, = Q + Q' + Q'' + \ldots$$

$$(lx) + (lx') + (lx'') + \ldots = 0$$

stattfinden, die zur Prüfung der numerischen Rechnungen dienen können.

69.

Aus den Gleichungen (57) und (58) kann man ohne Mühe sowohl ψ wie u, $u_{,}$, $u_{,,}$, etc. eliminiren. Seien

$$N = \frac{p}{P}H + \frac{p_{,}}{P_{,}}J + \frac{p_{,,}}{P_{,,}}K + \ldots - H'$$
$$N' = \frac{p'}{P}H + \frac{p_{,}'}{P_{,}}J + \frac{p_{,,}'}{P_{,,}}K + \ldots - J'$$
$$N'' = \frac{p''}{P}H + \frac{p_{,}''}{P_{,}}J + \frac{p_{,,}''}{P_{,,}}K + \ldots - K'$$
etc.
$$S = \frac{H^2}{P} + \frac{J^2}{P_{,}} + \frac{K^2}{P_{,,}} + \ldots$$

Multiplicirt man nun die erste Gleichung (57) mit $\frac{H}{P}$, die zweite mit $\frac{J}{P_{,}}$, die dritte mit $\frac{K}{P_{,,}}$, u. s. w. und addirt die Produkte, so erhält man in Folge der Bedingungsgleichung (56)

$$\psi = \frac{N}{S}x + \frac{N'}{S}x' + \frac{N''}{S}x'' + \ldots + \frac{\theta}{S} \quad . \quad . \quad (59)$$

und die Elimination von ψ aus den (57) giebt hierauf

$$\left.\begin{aligned}
u &= \left(\frac{NH}{SP} - \frac{p}{P}\right)x + \left(\frac{N'H}{SP} - \frac{p'}{P}\right)x' + \left(\frac{N''H}{SP} - \frac{p''}{P}\right)x'' \\
&\qquad + \ldots + \frac{H\theta}{SP} \\
u_{,} &= \left(\frac{NJ}{SP_{,}} - \frac{p_{,}}{P_{,}}\right)x + \left(\frac{N'J}{SP_{,}} - \frac{p_{,}'}{P_{,}}\right)x' + \left(\frac{N''J}{SP_{,}} - \frac{p_{,}''}{P_{,}}\right)x'' \\
&\qquad + \ldots + \frac{J\theta}{SP_{,}} \\
u_{,,} &= \left(\frac{NK}{SP_{,,}} - \frac{p_{,,}}{P_{,,}}\right)x + \left(\frac{N'K}{SP_{,,}} - \frac{p_{,,}'}{P_{,,}}\right)x' + \left(\frac{N''K}{SP_{,,}} - \frac{p_{,,}''}{P_{,,}}\right)x'' \\
&\qquad + \ldots + \frac{K\theta}{SP_{,,}}
\end{aligned}\right\} (60)$$

u. s. w. Setzt man diese Werthe von u, $u_{,}$, $u_{,,}$, etc. und ψ in die (58), so ergiebt sich das folgende System von Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
(aa)x + (ab)x' + (ac)x'' + \ldots &= (al) \\
(ab)x + (bb)x' + (bc)x'' + \ldots &= (bl) \\
(ac)x + (bc)x' + (cc)x'' + \ldots &= (cl)
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (61)$$

u. s. w. in welchen die Coefficienten die folgenden Ausdrücke erhalten,

$$(aa) = Q + \frac{N^2}{S} - (pp)$$
$$(ab) = \frac{NN'}{S} - (pp')$$
$$(ac) = \frac{NN''}{S} - (pp'')$$
etc.
$$(al) = (lx) - \frac{N\theta}{S}$$

$$(bb) = Q' + \frac{N'^2}{S} - (p'p')$$
$$(bc) = \frac{N'N''}{S} - (p'p'')$$
etc.
$$(bl) = (lx') - \frac{N'\theta}{S}$$

$$(cc) = Q'' + \frac{N''^2}{S} (p''p'')$$
etc.
$$(cl) = (lx'') - \frac{N''\theta}{S}$$

---

u. s. w. nachdem die folgenden Abkürzungen eingeführt worden sind,

$$(pp) = \frac{p^2}{P} + \frac{p_,^2}{P_,} + \frac{p_{,,}^2}{P_{,,}} + \ldots$$
$$(pp') = \frac{pp'}{P} + \frac{p_,p_,'}{P_,} + \frac{p_{,,}p_{,,}'}{P_{,,}} + \ldots$$
$$(pp'') = \frac{pp''}{P} + \frac{p_,p_,''}{P_,} + \frac{p_{,,}p_{,,}''}{P_{,,}} + \ldots$$
etc.

$$(p'p') = \frac{p'^2}{P} + \frac{p_,'^2}{P_,} + \frac{p_{,,}'^2}{P_{,,}} + \ldots$$
$$(p'p'') = \frac{p'p''}{P} + \frac{p_,'p_,''}{P_,} + \frac{p_{,,}'p_{,,}''}{P_{,,}} + \ldots$$
etc.

$$(p''p'') = \frac{p''^2}{P} + \frac{p_,''^2}{P_,} + \frac{p_{,,}''^2}{P_{,,}} + \ldots$$
etc.

---

u. s. w. womit die Elimination der Unbekannten u, $u_,$, etc. ausgeführt ist.

70.

Suchen wir jetzt den einfachsten Ausdruck für die Summe der mit ihren Gewichten multiplicirten Fehlerquadrate, die wie oben mit W bezeichnet werden soll. Die erste Entwickelung des für diese Summe im Art. 67 aufgestellten Ausdrucks giebt

$$\begin{aligned} W = &\{Qx + pu + p_,u_, + p_{,,}u_{,,} + \ldots - (lx)\}\, x \\ + &\{Q'x' + p'u + p'_,u_, + p'_{,,}u_{,,} + \ldots - (lx')\}\, x' \\ + &\{Q''x'' + p''u + p''_,u_, + p''_{,,}u_{,,} + \ldots - (lx'')\}\, x'' \\ + &\text{ etc.} \end{aligned}$$

$$+ \{px + p'x' + p''x'' + \ldots + Pu\}u$$
$$+ \{p_,x + p'_,x' + p''_,x'' + \ldots + P_,u_,\}u_,$$
$$+ \{p_{,,}x + p'_{,,}x' + p''_{,,}x'' + \ldots + P_{,,}u_{,,}\}u_{,,}$$
$$+ \text{etc.}$$
$$+ (ll) - \{(lx)x + (lx')x' + (lx'')x'' + \ldots\}$$

wo

$$\begin{aligned}(ll) = & \; pl^2 + p'l'^2 + p''l''^2 + \ldots \\ & + p_,l_,^2 + p'_,l'^2_, + p''_,l''^2_, + \ldots \\ & + p_{,,}l_{,,}^2 + p'_{,,}l'^2_{,,} + p''_{,,}l''^2_{,,} + \ldots \\ & + \text{etc.}\end{aligned}$$

gesetzt ist. Zufolge der Gleichungen (57) und (58) geht dieser Ausdruck zuerst in den folgenden über

$$\begin{aligned}W = & \; \psi\{Hu + Ju_, + Ku_{,,} + \ldots + H'x + J'x' + K'x'' + \ldots\} \\ & + (ll) - (lx)x - (lx')x' - (lx'')x'' - \ldots\end{aligned}$$

und dieser verwandelt sich zufolge der Gleichungen

$$\begin{aligned}(lx) &= (al) + \frac{N}{S}\,\theta \\ (lx') &= (bl) + \frac{N'}{S}\,\theta \\ (lx'') &= (cl) + \frac{N''}{S}\,\theta \\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

und der (56) und (59) in den folgenden

$$W = \frac{\theta^2}{S} + (ll) - (al)x - (bl)x' - (cl)x'' - \ldots$$

Wenden wir uns jetzt zum Inhalt des Art. 54, so finden wir, dass die rechte Seite dieses Ausdrucks für W, mit Ausnahme des ersten Gliedes, mit der dort mit $\Omega_,$ bezeichneten Function identisch ist. Da nun aber hier alles was sich a. a. O. auf die Bedingungsgleichungen bezieht weggelassen werden muss, weil die einzige hier vorhandene Bedingungsgleichung in den vorstehenden Ausdrücken schon vollständig berücksichtigt worden ist, so ergiebt sich sogleich

$$W = (ll,n) + \frac{\theta^2}{S}$$

welches der einfachste Ausdruck dieser Function ist. Die Grösse (ll,n) wird hier bei der numerischen Auflösung der Gleichungen (61) auf dieselbe Art erhalten, wie im Art. 43 allgemein gezeigt wurde.

71.

In der Bedingungsgleichung (56) sind alle Coefficienten unbestimmt gelassen worden, aber es ist von Wichtigkeit zu untersuchen, welche Wirkung die eine oder andere Bestimmung derselben auf die Werthe der Unbekannten, die aus den (61) hervorgehen, so wie auf den Betrag der Function W ausüben. Diese Untersuchung soll jetzt vorgenommen werden. Nehmen wir an, dass die (61) unbestimmt aufgelöst worden sind, und setzen demzufolge

$$(62) \quad \ldots \quad \begin{cases} x = (1,1)(al) + (1,2)(bl) + (1,3)(cl) + \ldots \\ x' = (1,2)(al) + (2,2)(bl) + (2,3)(cl) + \ldots \\ x'' = (1,3)(al) + (2,3)(bl) + (3,3)(cl) + \ldots \end{cases}$$

u. s. w. Man bekommt nun durch die Verbindung dieser mit den (61) auf bekannte Art die folgenden Gleichungen

$$\begin{array}{l} (1,1)(aa) + (1,2)(ab) + (1,3)(ac) + \ldots = 1 \\ (1,1)(ab) + (1,2)(bb) + (1,3)(bc) + \ldots = 0 \\ (1,1)(ac) + (1,2)(bc) + (1,3)(cc) + \ldots = 0 \\ \text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.} \\ (1,2)(aa) + (2,2)(ab) + (2,3)(ac) + \ldots = 0 \\ (1,2)(ab) + (2,2)(bb) + (2,3)(bc) + \ldots = 1 \\ (1,2)(ac) + (2,2)(bc) + (2,3)(cc) + \ldots = 0 \\ \text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.} \\ (1,3)(aa) + (2,3)(ab) + (3,3)(ac) + \ldots = 0 \\ (1,3)(ab) + (2,3)(bb) + (3,3)(bc) + \ldots = 0 \\ (1,3)(ac) + (2,3)(bc) + (3,3)(cc) + \ldots = 1 \\ \text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.} \end{array}$$

Die Ausdrücke der Coefficienten (aa), (ab), etc. etc. des Art. 69 geben aber durch die Addition, mit Berücksichtigung der Ausdrücke für P, $P_{,}$, etc. und Q, Q', etc. die ihrer Seits

$$\begin{array}{l} Q = (pp) + (pp') + (pp'') + \ldots \\ Q' = (pp') + (p'p') + (p'p'') + \ldots \\ Q'' = (pp'') + (p'p'') + (p''p'') + \ldots \\ \text{etc.} \end{array}$$

geben, die folgenden

$$(aa) + (ab) + (ac) + \ldots = \frac{N\Sigma N}{S}$$
$$(ab) + (bb) + (bc) + \ldots = \frac{N'\Sigma N}{S}$$
$$(ac) + (bc) + (cc) + \ldots = \frac{N''\Sigma N}{S}$$
etc.

wenn man

$$\Sigma N = N + N' + N'' + \ldots$$

setzt, und vermittelst dieser erhält man aus den vorstehenden Gleichungen, wenn man jede Gruppe derselben summirt,

$$\left.\begin{aligned}(1,1)N + (1,2)N' + (1,3)N'' + \ldots &= \frac{S}{\Sigma N}\\ (1,2)N + (2,2)N' + (2,3)N'' + \ldots &= \frac{S}{\Sigma N}\\ (1,3)N + (2,3)N' + (3,3)N'' + \ldots &= \frac{S}{\Sigma N}\\ \text{etc.} \qquad\qquad & \quad \text{etc.}\end{aligned}\right\} \quad . \qquad (63)$$

Berücksichtigt man nun in den Ausdrücken für (al), (bl), etc. nur die von θ abhängigen Glieder, setzt demzufolge

$$(al) = -\frac{N}{S}\theta$$
$$(bl) = -\frac{N'}{S}\theta$$
$$(cl) = -\frac{N''}{S}\theta$$
etc.

und substituirt diese Werthe in die (62), so ergiebt sich in Folge der (63)

$$x = x' = x'' = \text{etc.} = -\frac{\theta}{\Sigma N}$$

Die Einführung des Coefficienten θ der Bedingungsgleichung (56) fügt also allen beobachteten Richtungen eine und dieselbe Grösse hinzu, und hat folglich auf die Unterschiede derselben, das ist auf die aus den Beobachtungen hervorgehenden Winkel zwischen den eingeschnittenen Punkten, gar keinen Einfluss.

72.

Man multiplicire die erste der Gleichungen (63) mit (al), die zweite mit (bl), die dritte mit (cl), u. s. w. und addire die Produkte, so ergiebt sich in Folge der (62)

$$Nx + N'x' + N''x'' + \ldots = \frac{S}{\Sigma N}\{(al) + (bl) + (cl) + \ldots\}$$

Aber die Ausdrücke des Art. 69 für (al), (bl), etc. geben in Verbindung mit der Gleichung

$$(lx) + (lx') + (lx'') + \ldots = 0$$

des Art. 68

$$(al) + (bl) + (cl) + \ldots = -\frac{\Sigma N}{S}\,\theta$$

und folglich wird

(64) . . . $Nx + N'x' + N''x'' + \ldots + \theta = 0$

Hiemit giebt die (59)

$$\psi = 0$$

und die (60) gehen über in

(65) . . $$\begin{cases} u = -\frac{p}{P}x - \frac{p'}{P}x' - \frac{p''}{P}x'' - \ldots \\ u_{,} = -\frac{p_{,}}{P_{,}}x - \frac{p_{,}'}{P_{,}}x' - \frac{p_{,}''}{P_{,}}x'' - \ldots \\ u_{,,} = -\frac{p_{,,}}{P_{,,}}x - \frac{p_{,,}'}{P_{,,}}x' - \frac{p_{,,}''}{P_{,,}}x'' - \ldots \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Substituirt man hierin den im vor. Art. für die x erhaltenen gemeinschaftlichen Werth, so ergiebt sich

$$u = u_{,} = u_{,,} = \text{etc.} = \frac{\theta}{\Sigma N}$$

woraus hervorgeht, dass die Einführung der Grösse θ allen u dieselbe Grösse hinzufügt, die sie von den x abzieht. Es bekommen also nicht blos die Winkel zwischen den beobachteten Richtungen, sondern auch die Summen $x + u$, $x' + u$, etc. $x + u_{,}$, $x' + u_{,}$, etc. etc. dieselben bestimmten Werthe, wie auch θ angenommen wird.

73.

Aus dem zunächst Vorhergehenden folgt schon, dass die Summe der mit den Gewichten multiplicirten Fehlerquadrate von θ unabhängig sein muss, da sie blos Function von den Summen $x + u$, $x' + u$, etc. $x + u_{,}$, $x' + u_{,}$, etc. etc. ist, es soll aber diese Eigenschaft direct bewiesen werden. Nehmen wir zu dem Ende den Ausdruck

$$W = \frac{\theta^2}{S} + [ll] - [al]x - [bl]x' - [cl]x'' - \ldots$$

des Art. 70 vor, und erwägen dass $[ll]$ von θ unabhängig ist, und mit blosser Rücksicht auf die von θ abhängigen Glieder

$$x = x' = x'' = \text{etc.} = -\frac{\theta}{\Sigma N}$$

und

$$(al) = -\frac{N}{S}\theta, \quad (bl) = -\frac{N'}{S}\theta, \quad (cl) = -\frac{N''}{S}\theta, \quad \text{etc.}$$

sind, so erhält man, wieder mit bloser Rücksicht auf die Glieder, die θ enthalten,

$$W = \frac{\theta^2}{S} - \frac{\theta^2}{S} = 0$$

also W von θ unabhängig, w. z. b. w.

74.

Es kommt jetzt die Untersuchung an die Reihe, welchen Einfluss die Coefficienten H, J, K, etc. unserer Bedingungsgleichung (56) auf die Werthe der Unbekannten ausüben. Aus dem Umstande dass $\psi = 0$ ist, wie im vorvor. Art. bewiesen wurde, könnten wir schon den Schluss ziehen, dass diese Coefficienten, gleichwie θ, willkührlich bleiben, allein diese Sache verdient direct untersucht zu werden.

Wie man gesehen hat, treten diese Coefficienten nicht unmittelbar in die Coefficienten der Gleichungen (61) ein, sondern die mit N, N', N'', etc. und S bezeichneten Functionen derselben, aber wenn wir mit den H, J, K, etc. H', J', K', etc. irgend welche beliebige Aenderungen vornehmen, so können wir nicht nur die daraus hervorgehenden Aenderungen von N, N', etc. S mit ΔN, $\Delta N'$, $\Delta N''$, etc. ΔS, sondern auch die daraus folgenden Aenderungen der Coefficienten der (61) mit $\Delta(aa)$, $\Delta(ab)$, etc. etc. und die der Unbekannten mit Δx, $\Delta x'$, $\Delta x''$, etc. bezeichnen. Die Gleichungen (61) gehen daher nach diesen Aenderungen strenge in die folgenden

$$\left.\begin{aligned}
&[(aa)+\Delta(aa)]\Delta x+[(ab)+\Delta(ab)]\Delta x'+[(ac)+\Delta(ac)]\Delta x''+\ldots+F=0\\
&[(ab)+\Delta(ab)]\Delta x+[(bb)+\Delta(bb)]\Delta x'+[(bc)+\Delta(bc)]\Delta x''+\ldots+F'=0\\
&[(ac)+\Delta(ac)]\Delta x+[(bc)+\Delta(bc)]\Delta x'+[(cc)+\Delta(cc)]\Delta x''+\ldots+F''=0
\end{aligned}\right\}(66)$$

u. s. w. über, in welchen die völlig bekannten Glieder die Ausdrücke

$$\begin{aligned}
F &= x\Delta(aa) + x'\Delta(ab) + x''\Delta(ac) + \ldots - \Delta(al)\\
F' &= x\Delta(ab) + x'\Delta(bb) + x''\Delta(bc) + \ldots - \Delta(bl)\\
F'' &= x\Delta(ac) + x'\Delta(bc) + x''\Delta(cc) + \ldots - \Delta(cl)\\
&\text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

haben. Wir dürfen jetzt, ohne dass die Strenge des Resultats dadurch verletzt würde, die Veränderung ΔS für sich betrachten. Setzt man zu dem Ende

$$r = \frac{1}{S+\Delta S} - \frac{1}{S}$$

so bekommt man

$$\Delta(aa) = N^2 r, \quad \Delta(ab) = NN'r, \quad (\Delta(ac) = NN''r, \text{ etc.} \quad \Delta(al) = -N\theta r$$
$$\Delta(bb) = N'^2 r, \quad \Delta(bc) = N'N''r, \text{ etc.} \quad \Delta(bl) = -N'\theta r$$
$$\Delta(cc) = N''^2 r, \text{ etc.} \quad \Delta(cl) = -N''\theta r$$

u. s. w. und es werden

$$F = Nr(Nx + N'x' + N''x'' + \ldots + \theta)$$
$$F' = N'r(Nx + N'x' + N''x'' + \ldots + \theta)$$
$$F'' = N''r(Nx + N'x' + N''x'' + \ldots + \theta)$$

u. s. w. also in Folge der (64)

$$F = F' = F'' = \text{etc.} = 0$$

Hiemit werden vermöge der (66) auch

$$\Delta x = \Delta x' = \Delta x'' = \text{etc.} = 0$$

oder irgend eine Aenderung von S, sei sie auch noch so gross, bringt keine Aenderung in den Werthen der Unbekannten hervor.

Untersuchen wir jetzt die Wirkung der gleichzeitigen Aenderungen ΔN und $\Delta N'$. Die Annahme dieser giebt strenge

$$\Delta(aa) = 2N\frac{\Delta N}{S} + \frac{\Delta N^2}{S}, \quad \Delta(bb) = 2N'\frac{\Delta N'}{S} + \frac{\Delta N'^2}{S}, \quad \Delta(cc) = 0$$
$$\Delta(ab) = N'\frac{\Delta N}{S} + N\frac{\Delta N'}{S} + \frac{\Delta N \Delta N'}{S}, \quad \Delta(bc) = N''\frac{\Delta N'}{S} \quad \Delta(cd) = 0$$
$$\Delta(ac) = N''\frac{\Delta N}{S} \quad \Delta(bd) = N'''\frac{\Delta N'}{S} \quad \text{etc.}$$
$$\Delta(ad) = N'''\frac{\Delta N}{S} \quad \text{etc.} \quad \Delta(cl) = 0$$
$$\text{etc.} \quad \Delta(bl) = -\frac{\Delta N'}{S}\theta \quad \text{etc. etc.}$$
$$\Delta(al) = -\frac{\Delta N}{S}\theta$$

und setzt man jetzt zur Abkürzung

$$\varrho = \frac{x\Delta N + x'\Delta N'}{S}$$

so findet man mit Zuziehung der Gleichung (64)

$$F = (N + \Delta N)\varrho$$
$$F' = (N' + \Delta N')\varrho$$
$$F'' = N''\varrho$$
$$F''' = N'''\varrho$$

u. s. w. die in die (66) zu setzen sind. Setzt man hiemit zugleich

$$\Delta x' = \Delta x + z\,, \quad \Delta x'' = \Delta x + z'\,, \text{ etc.}$$

wo z, z', etc. unbestimmte Grössen sind, so erhält man nach einer leichten Reduction

$$\begin{aligned}
&(N + \Delta N)\,\frac{\Sigma N+\Delta N+\Delta N'}{S}\,\Delta x \\
&+ [(ab) + \Delta(ab)]z + [(ac) + \Delta(ac)]z' + \ldots + (N + \Delta N)\varrho = 0 \\
&(N' + \Delta N')\,\frac{\Sigma N+\Delta N+\Delta N'}{S}\,\Delta x \\
&+ [(bb) + \Delta(bb)]z + [(bc) + \Delta(bc)]z' + \ldots + (N' + \Delta N')\varrho = 0 \\
&N''\,\frac{\Sigma N+\Delta N+\Delta N'}{S}\,\Delta x + [(bc) + \Delta(bc)]z + (cc)z' + \ldots + N''\varrho = 0 \\
&\text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

die auf den ersten Blick zeigen, dass ihnen nur durch

$$z = z' = \text{etc.} = 0$$

Gnüge geleistet werden kann, und dass sie

$$\Delta x = \Delta x' = \Delta x'' = \text{etc.} = -\frac{x\Delta N+x'\Delta N'}{\Sigma N+\Delta N+\Delta N'}$$

geben. Man sieht leicht ein, dass je zwei Aenderungen ΔN ein analoges Resultat geben müssen, und da in den Ausdrücken der Coefficienten der Gleichungen (61) die N nur in zwei Dimensionen vorkommen, so muss die Betrachtung der gleichzeitigen Aenderungen aller N auch ein analoges Resultat geben. Ferner ist in Folge des Vorhergehenden leicht einzusehen, dass die Hinzufügung einer Aenderung von S dieses Resultat nicht ändern kann.

Die vorhergehenden Entwickelungen geben daher zu erkennen, dass irgend welche Aenderungen, die man mit N, N', N'', etc. und S vornimmt, höchstens die Werthe der x, x', x'', etc. um eine und dieselbe Grösse ändern können, und folglich ohne Einfluss auf die Winkel sind. Auch findet man durch die (65), gleichwie oben, dass immer diese gemeinschaftliche Aenderung der x, x', etc. die nemliche Aenderung im entgegengesetzten Sinne in den Werthen der u, $u_{,}$, $u_{,,}$, etc. hervorbringt.

Da demzufolge die Aggregate $x + u$, $x' + u$, etc. $x + u_{,}$, $x' + u_{,}$, etc. etc. unverändert bleiben, so folgt aus dem Ausdruck für W, dass diese Grösse stets unverändert bleibt, und also ein absolutes Minimum ist.

Es ist aber hiebei zu bedenken, dass man die N nicht alle gleich Null, und S nicht unendlich gross machen darf, weil dadurch bewirkt

werden würde, dass von den Gleichungen (61) jede in den übrigen enthalten wäre.

75.

Da dem Vorhergehenden zufolge die N, N', N'', etc. und S mit der eben angegebenen Ausnahme völlig willkührlich sind, so kann man sie anwenden, um aus den Gleichungen (61) möglichst viele Glieder fortzuschaffen, wodurch die Rechnung vereinfacht wird. Dass man von den mit denselben zwei Buchstaben bezeichneten Coefficienten keinen fortschaffen darf, zeigt schon die vorhergehende Auflösung der allgemeinen Aufgabe dadurch, dass diese Coefficienten in den Nennern der verschiedenen Ausdrücke eintreten, auch würden dadurch die N imaginäre Werthe bekommen. Aber von den anderen Coefficienten der (61) darf man so viele fortschaffen wie überhaupt möglich ist, und da die Anzahl der N der Anzahl der x gleich ist, so kann man im Allgemeinen, wenn man wieder die Anzahl der x mit n bezeichnet, n Coefficienten, oder Glieder, gleich Null machen, und zwar kann dieses auf vielerlei Arten geschehen.

Eine Art n Glieder fortzuschaffen besteht darin, dass man im Voraus annimmt, dass der Werth irgend einer der x gleich Null werden soll. Sei z. B.

$$x = 0$$

dann giebt die erste Gleichung (58) die Bedingungsgleichung

$$pu + p_{,}u'_{,} + p_{,,}u_{,,} + \ldots = (lx)$$

und vergleicht man diese mit der (56), so werden

$$H = p,\quad J = p_{,},\quad K = p_{,,},\ \text{etc.}\quad H' = J' = K' = \text{etc.} = 0,\quad \theta = (lx)$$

Die Substitution dieser in die Ausdrücke für N, N', etc. des Art. 69 giebt

$$N = (pp),\quad N' = (pp'),\quad N'' = (pp''),\ \text{etc.}\quad S = (pp)$$

womit man die folgenden Ausdrücke der Coefficienten der (61) bekommt,

$$\begin{array}{ll}
(aa) = Q\ , & (bb) = Q' + \frac{(pp')^2}{(pp)} - (p'p') \\
(ab) = 0\ , & (bc) = \frac{(pp')(pp'')}{(pp)} - (p'p'') \\
(ac) = 0\ , & (bd) = \frac{(pp')(pp''')}{(pp)} - (p'p''') \\
(ad) = 0\ , & \\
\text{etc.} & \text{etc.} \\
(al) = 0\ , & (bl) = (lx') - \frac{(pp')}{(pp)}(lx)
\end{array}$$

$$(cc) = Q'' + \frac{(pp'')^2}{(pp)} - (p''p'') \quad , \quad (dd) = Q''' + \frac{(pp''')^2}{(pp)} - (p'''p''')$$

$$(cd) = \frac{(pp'')(pp''')}{(pp)} - (p''p''') \quad , \quad \text{etc.}$$

etc.

$$(dl) = (lx''') - \frac{(pp''')}{(pp)}(lx)$$

$$(cl) = (lx'') - \frac{(pp'')}{(pp)}(lx) \quad ,$$

u. s. w. Die Gleichungen (61) werden hierauf

$$\begin{aligned} Qx &&= 0 \\ (bb)x' + (bc)x'' + (bd)x''' + \ldots &= (bl) \\ (bc)x' + (cc)x'' + (cd)x''' + \ldots &= (cl) \\ (bd)x' + (cd)x'' + (dd)x''' + \ldots &= (dl) \end{aligned}$$

u. s. w. woraus $x = 0$ folgt, wie im Voraus bestimmt wurde. Der Art. 70 giebt in diesem Falle

$$W = (ll,n) + \frac{(lx)^2}{(pp)}$$

76.

Das im vor. Art. entwickelte Verfahren ist nicht das zweckmässigste zur Anwendung, denn es ist gar kein reeller Gewinn darin enthalten, dass im ersten Theile der Auflösung die Verbesserung einer der beobachteten Richtungen Null wird. Die Bedingung, die hier dazu angewandt worden ist um (al) Null zu machen, kann zweckmässiger dazu verwandt werden um noch einen Coefficienten einer der Unbekannten z. B. $(bc) = 0$ zu machen, denn hieraus entstehen im Verlaufe der Auflösung wesentliche Vereinfachungen, die darin bestehen, dass eine Anzahl anderer, sonst auch zu berechnender Grössen, zugleich Null werden.

Es sollen daher jetzt die Coefficienten

$$(ab)\,,\ (ac)\,,\ (ad)\,,\ \text{etc. nebst } (bc)$$

gleich Null gemacht werden, deren Anzahl n ist. Da auch S willkührlich ist, so scheint es als könne man noch einen Coefficienten Null machen, allein die Ausdrücke der Coefficienten (aa), (ab), etc. des Art. 69 zeigen, dass dieses unmöglich ist, indem sie alle zu Functionen von $\frac{N}{\sqrt{S}}$, $\frac{N'}{\sqrt{S}}$, etc. und $\frac{\theta}{\sqrt{S}}$ gemacht werden können, wodurch S gänzlich aus denselben entfernt werden kann. Es soll daher zur Vereinfachung

$$S = 1$$

gesetzt werden. Die Grösse θ giebt Veranlassung ausser den oben genannten Coefficienten der Unbekannten auch eins der völlig bekannten Glieder (al), (bl), etc. Null machen zu können, aber da daraus kein reeller Vortheil erwächst, im Gegentheil die Ausdrücke dieser Coefficienten mehr zusammengesetzt werden, so mache ich von diesem Umstande keinen Gebrauch, sondern setze vielmehr

$$\theta = 0$$

Die hierauf zu berechnenden Ausdrücke sind demnach zuerst die (pp), (pp'), etc. $(p'p')$, etc. etc. nach den im Art. 69 gegebenen Ausdrücken. Da nun

$$\begin{aligned} NN' &= (pp') \\ NN'' &= (pp'') \\ NN''' &= (pp''') \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

und

$$N'N'' = (p'p'')$$

werden müssen, so bekommt man

$$\begin{aligned} N &= \sqrt{\frac{(pp')(pp'')}{(p'p'')}}, & N''' &= \frac{(pp''')}{N} \\ N' &= \sqrt{\frac{(pp')(p'p'')}{(pp'')}}, & N^{iv} &= \frac{(pp^{iv})}{N} \\ N'' &= \sqrt{\frac{(pp'')(p'p'')}{(pp')}}, & N^{v} &= \frac{(pp^{v})}{N} \\ & & &\text{etc.} \end{aligned}$$

die auch zu berechnen sind. Alsdann werden

$$\begin{aligned} (aa) &= Q + N^2 - (pp), \\ (ab) &= 0 \\ (ac) &= 0 \\ (ad) &= 0 \\ (ae) &= 0 \\ &\text{etc.} \\ (al) &= (lx) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (bb,1) &= Q' + N'^2 - (p'p') \\ (bc,1) &= (bc) = 0 \\ (bd,1) &= N'N''' - (p'p''') \\ (be,1) &= N'N^{iv} - (p'p^{iv}) \\ &\text{etc.} \\ (bl,1) &= (lx') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (cc,2) &= Q'' + N''^2 - (p''p'') \\ (cd,2) &= N''N''' - (p''p''') \\ (ce,2) &= N''N^{iv} - (p''p^{iv}) \\ &\text{etc.} \\ (cl,2) &= (lx'') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (dd,1) &= Q''' + N'''^2 - (p'''p''') \\ (de,1) &= N'''N^{iv} - (p'''p^{iv}) \\ &\text{etc.} \\ (dl,1) &= (lx''') \end{aligned}$$

$$(ee,1) = Q^{IV} + N^{IV\,2} - (p^{IV}p^{IV})$$

etc.

$$(el,1) = (lx^{IV})$$

etc. bis

$$\begin{aligned}(ll) = {} & p l^2 + p' l'^2 + p'' l''^2 + p''' l'''^2 + \dots \\ & + p_{,} l_{,}^2 + p'_{,} l'^2_{,} + p''_{,} l''^2_{,} + p'''_{,} l'''^2_{,} + \dots \\ & + p_{,,} l_{,,}^2 + p'_{,,} l'^2_{,,} + p''_{,,} l''^2_{,,} + p'''_{,,} l'''^2_{,,} + \dots \\ & + p_{,,,} l_{,,,}^2 + p'_{,,,} l'^2_{,,,} + p''_{,,,} l''^2_{,,,} + p'''_{,,,} l'''^2_{,,,} + \dots \\ & + \text{etc.}\end{aligned}$$

welche letzte Function zur gleichzeitigen Berechnung von W dient, und mit welcher

$$W = (ll,n)$$

erhalten wird. Die aufzulösenden Gleichungen (61) gehen hiemit in die folgenden über,

$$\begin{aligned}
&(aa)x && = (al) \\
&(bb,1)x' + (bd,1)x''' + (be,1)x^{IV} + \dots && = (bl,1) \\
&(cc,2)x'' + (cd,2)x''' + (ce,2)x^{IV} + \dots && = (cl,2) \\
&(bd,1)x' + (cd,2)x'' + (dd,1)x''' + (de,1)x^{IV} + \dots && = (dl,1) \\
&(be,1)x' + (ce,2)x'' + (de,1)x''' + (ee,1)x^{IV} + \dots && = (el,1) \\
&\qquad \text{etc.} && \quad \text{etc.}
\end{aligned}$$

die auf die vorbeschriebene Art in der Auflösung zu behandeln sind. Es kann noch angemerkt werden, dass in Folge der fehlenden Coefficienten derselben von den Hülfsgrössen des Art. 43

$$\alpha' = \beta' = \gamma' = \delta' = \text{etc.} = \beta'' = 0$$

werden, so wie dass von denen des Art. 44

$$\alpha'' = \alpha''' = \alpha^{IV} = \text{etc.} = 0$$

werden, und die übrigen die folgenden Ausdrücke erhalten,

$$\begin{aligned}
\beta''' &= \gamma'' \\
\beta^{IV} &= \delta'' + \delta'''\beta''' \\
\gamma^{IV} &= \delta''' + \delta'''\gamma''' \\
\beta^{V} &= \varepsilon'' + \varepsilon^{IV}\beta''' + \varepsilon^{V}\beta^{IV} \\
\gamma^{V} &= \varepsilon''' + \varepsilon^{IV}\gamma''' + \varepsilon^{V}\gamma^{IV} \\
\delta^{V} &= \varepsilon^{IV} + \varepsilon^{V}\delta^{IV}
\end{aligned}$$

etc.

worauf die Ausdrücke der Unbekannten

$$\begin{array}{llllll} -x &= \chi' & & & & \\ -x' &= & \chi'' & + \chi^{IV}\beta''' & + \chi^{V}\beta^{IV} & \\ -x'' &= & & \chi''' + \chi^{IV}\gamma''' & + \chi^{V}\gamma^{IV} & \\ -x''' &= & & \chi^{IV} & + \chi^{V}\delta^{IV} & \\ -x^{IV} &= & & & \chi^{V} & \\ \text{etc.} & & & & \text{etc.} & \end{array}$$

sich ergeben. Die vorbeschriebenen Rechnungen können durch die folgenden Gleichungen, die aus dem Art. 71 hervorgehen, geprüft und wo nöthig berichtigt werden. Die (pp), (pp'), etc. durch

$$\begin{array}{l} (pp) + (pp') + (pp'') + \ldots = Q \\ (pp') + (p'p') + (p'p'') + \ldots = Q' \\ (pp'') + (p'p'') + (p''p'') + \ldots = Q'' \\ \quad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \end{array}$$

die (aa), $(bb,1)$ etc. durch

$$\begin{array}{lllll} (aa) & & & & = N\Sigma N \\ & (bb,1) & & + (bd,1) + \ldots & = N'\Sigma N \\ & & (cc,2) & + (cd,2) + \ldots & = N''\Sigma N \\ & (bd,1) & + (cd,2) & + (dd,1) + \ldots & = N'''\Sigma N \\ & & \text{etc.} & & \text{etc.} \end{array}$$

und die Werthe der Unbekannten selbst durch

$$0 = Nx + N'x' + N''x'' + N'''x''' + \ldots$$

die aus dem Art. 72 hervorgeht. Will man hierauf auch die Werthe der u, $u_{,}$, etc. kennen lernen, so dienen hiezu die Gleichungen (65). Wenn eine oder mehrere der (pp'), (pp''), $(p'p'')$ Null werden, so können durch die obigen Ausdrücke die N, N', N'' nicht berechnet werden, aber in diesem Falle kann man durch Abänderung der Reihenfolge, in welcher man anfänglich die Richtungen aufgestellt hat, immer diese Bestimmung wieder möglich machen.

Das eben entwickelte Verfahren den ersten Theil der Auflösung unserer Aufgabe, oder die sogenannte »Ausgleichung auf den Stationen« zu behandeln, bewirkt nicht nur an sich selbst ein kurzes Verfahren, dessen richtige numerische Ausführung durch die zur Controle derselben vorhandenen Gleichungen gesichert wird, sondern die zum Verschwinden gebrachten Coefficienten üben auch auf den zweiten Theil der Auflösung

in Bezug auf die Abkürzung desselben wesentliche Wirkung aus, indem sie bewirken, dass auch dort eine Anzahl von Gliedern verschwinden.

77.

Die Ausdrücke des vor. Art. führen in zwei verschiedenen Fällen die allgemeine Aufgabe, auch in ihrer Anwendung auf die Geodäsie, auf den im Art. 55 betrachteten speciellen Fall zurück. Der eine dieser Fälle tritt jedes Mal auf den Stationen ein, auf welchen nur drei Richtungen eingeschnitten worden sind, denn kürzt man die Gleichungen auf diesen Fall ab, so werden sie

$$\begin{aligned} x &= \frac{(al)}{(aa)} = \frac{(lx)}{(aa)} \\ x' &= \frac{(bl,1)}{(bb,1)} = \frac{(lx')}{(bb,1)} \\ x'' &= \frac{(cl,2)}{(cc,2)} = \frac{(lx'')}{(cc,2)} \end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned} (aa) &= Q + N^2 - (pp) &&= N(N+N'+N'') \\ (bb,1) &= Q' + N'^2 - (p'p') &&= N'(N+N'+N'') \\ (cc,2) &= Q'' + N''^2 - (p''p'') &&= N''(N+N'+N'') \end{aligned}$$

sind, und

$$\begin{matrix} (pp), & (pp'), & (pp'') \\ & (p'p'), & (p'p'') \\ & & (p''p'') \end{matrix}$$

so wie N, N', N'' eben so wie im allgemeinen Falle zu berechnen sind.

Alle mit α, β, γ, etc. und angehängten Strichen bezeichneten Grössen werden hier Null, und zur Berechnung der Summe der mit ihren Gewichten multiplicirten Fehlerquadrate ergiebt sich aus dem Vorhergehenden

$$W = (ll,3) \doteq (ll) - x(lx) - x'(lx') - x''(lx'')$$

Die allgemeinen Bedingungsgleichungen für die (pp), (pp'), etc. und für die Unbekannten selbst bestehen auch hier.

78.

Der zweite Fall, in welchem die allgemeinen Formeln von selbst in den genannten speciellen Fall übergehen, findet auf allen Stationen statt, auf welchen in jedem Gyrus alle vorhandenen Richtungen eingeschnitten

worden sind, und man in jedem Gyrus für sich allen Beobachtungen dasselbe Gewicht beilegen kann. Da in diesem Falle

$$p = p' = p'' = \text{etc.}$$
$$p_{,} = p'_{,} = p''_{,} = \text{etc.}$$
$$p_{,,} = p'_{,,} = p''_{,,} = \text{etc.}$$

u. s. w. ist, so giebt die Gleichung (9) schon zu erkennen, dass

$$x = \frac{(lx)}{p+p_{,}+p_{,,}+\ldots}, \quad x' = \frac{(lx')}{p+p_{,}+p_{,,}+\ldots}, \quad x'' = \frac{(lx'')}{p+p_{,}+p_{,,}+\ldots}$$

u. s. w. werden müssen, und die allgemeinen Ausdrücke des vorvor. Art. bestätigen nicht nur dieses, sondern weisen auch nach, dass in der That der genannte specielle Fall eintritt. Bezeichnet man wieder mit n die Summe aller Richtungen, so werden jetzt

$$P = np, \quad P_{,} = np_{,}, \quad P_{,,} = np_{,,}, \text{ etc.}$$
$$Q = Q' = Q'' = \text{etc.} = p + p_{,} + p_{,,} + \ldots$$

und Folge davon ist, dass sich

$$(pp) = (pp') = (pp'') = \text{etc.} = \frac{Q}{n}$$
$$(p'p') = (p'p'') = \text{etc.} = \frac{Q}{n}$$
$$(p''p'') = \text{etc.} = \frac{Q}{n}$$
$$\text{etc.}$$

und

$$N = N' = N'' = \text{etc.} = \sqrt{\frac{Q}{n}}$$

ergeben, die Coefficienten der Endgleichungen werden daher

$$(aa) = (bb,1) = (cc,2) = \text{etc.} = Q$$

und alle übrigen Coefficienten derselben werden Null. Diese Gleichungen gehen daher über in

$$Qx = (lx), \quad Qx' = (lx'), \quad Qx'' = (lx''), \text{ etc.}$$

woraus

$$x = \frac{(lx)}{p+p_{,}+p_{,,}+\ldots}$$
$$x' = \frac{(lx')}{p+p_{,}+p_{,,}+\ldots}$$
$$x'' = \frac{(lx'')}{p+p_{,}+p_{,,}+\ldots}$$

u. s. w. hervorgehen, w. z. b. w.

Wenn alle Gewichte einander gleich gesetzt werden dürfen, so gehen diese Ausdrücke in die arithmetischen Mittel aus den Beobachtungen einer jeden Richtung über.

Alle mit α, β, γ, etc. bezeichneten Grössen werden wieder Null, und ausserdem noch

$$(ll,n) = 0$$

Diese Resultate gelten wie gross auch die Anzahl der Richtungen ist, die den Forderungen dieses Artikels gemäss eingeschnitten worden sind.

79.

Zu den speciellen Fällen die vorkommen können gehört noch, abgesehen von den in den beiden nächstvorhergehenden Artikeln betrachteten, der Fall, dass auf der einen oder anderen Station mit den Richtungen nach den Dreieckspunkten zugleich Richtungen nach anderen Gegenständen, die keinen Dreieckspunkten angehören, beobachtet worden sind. Es können z. B. die Azimuthe dieser Gegenstände genau bestimmt sein, und man will sich derselben daher zur Orientirung des Dreiecksnetzes bedienen; es können auch andere Ursachen die Mitbestimmung solcher Punkte veranlasst haben, wie man weiter unten sehen wird.

Um in diesem Falle die Rechnungen möglichst abzukürzen, ist nichts weiter zu thun wie diese überzähligen Richtungen, wie ich sie nennen will, aus der natürlichen Reihenfolge der Richtungen auszuheben und ihnen die letzten Stellen in der Reihenfolge aller Richtungen der betreffenden Station zuzutheilen. Die Berechnung ist darauf eben so wie sonst auszuführen, und man erlangt durch diese Anordnung den Vortheil, dass in dem zweiten Theil der Auflösung diese überzähligen Richtungen so wenig wie möglich eintreten.

80.

Betrachten wir nun wieder den allgemeinen Fall, den auch der vor. Art. in sich schliesst, in welchem nicht jeder Gyrus, oder kein Gyrus, alle Richtungen enthält, dann sind zuerst in den Ausdrücken für (pp), (pp'), etc. die Gewichte der fehlenden Einstellungen Null zu machen, und demgemäss die numerischen Werthe dieser Grössen zu berechnen. Wenn die Beobachtungen so beschaffen sind, dass man die

Gewichte aller Einstellungen auf der Station einander gleich, und in Folge dessen = 1 setzen kann, (und dieser Fall kommt gewöhnlich vor, weil man selten im Stande ist etwaige Unterschiede in der Güte der Beobachtungen hinreichend genau durch Zahlen ausdrücken zu können,) so werden die Bedeutungen der Hülfsgrössen einfacher als im Art. 67 angegeben ist. Es werden alsdann

P die Anzahl der Einstellungen des ersten Gyrus,
$P_{,}$ » » » » » zweiten »
u. s. w.
Q die Anzahl der Einstellungen der Richtung x,
Q' » » » » » » x',
u. s. w.
(lu) die Summe der im ersten Gyrus durch die Einstellungen erhaltenen Werthe,
$(lu_{,})$ die Summe der im zweiten Gyrus durch die Einstellungen erhaltenen Werthe,
u. s. w.
(lx) die Summe der für x durch die Einstellungen erhaltenen Werthe,
(lx') » » » » x' » » » » »
u. s. w. Mit Rücksicht auf diese Bedeutungen der Hülfsgrössen ist es immer leicht die Werthe der Coefficienten (aa), etc. zu berechnen, aber es ist die Berechnung derselben gar nicht schwieriger, wenn p, $p_{,}$, etc. etc. verschiedene Werthe haben, vorausgesetzt dass diese ganze Zahlen sind, und diesen Fall kann man oft herbeiführen, und zur Abkürzung der Rechnung benutzen.

Wenn auf einer Station viele Gyri beobachtet worden sind, so wird es nicht ausbleiben, dass eine Anzahl von Gyri vorkommen, in welchen dieselben Punkte eingeschnitten worden sind, eine andere Anzahl in welchen ganz oder zum Theil andere Punkte, aber wieder in jedem Gyrus dieselben, u. s. w. Vorausgesetzt nun, dass man das Gewicht einer jeden Einstellung = 1 setzt, kann man aus jeder dieser Gruppen von Gyris zuerst das arithmetische Mittel nehmen, und dieses in der folgenden Rechnung so behandeln, als wäre dessen Gewicht gleich der Anzahl der Gyri, aus welchen es entstanden ist. Man kürzt dadurch die Rechnung wesentlich ab, ohne an der Strenge derselben etwas zu vergeben. Die so entstehenden Gewichte sind selbstverständlich ganze Zahlen, und es sind nun mit Rücksicht auf diese die Hülfsgrössen zu

berechnen. Wenn z. B. die erste Gruppe das arithmetische Mittel aus m Gyris ist, so setze man

$$p = p' = p'' = \text{etc.} = m\,, \quad \text{und} \quad P = \mu m$$

wenn μ die Anzahl der Richtungen ist, die in diesen Gyris eingeschnitten worden sind, u. s. w. Wenn in den Gyris, in welchen x vorkommt, diese Gewichte

$$p = m\,, \quad p_{,} = m_{,}\,, \quad p_{,,} = m_{,,}\,, \text{ etc.}$$

sind, so wird

$$Q = m + m_{,} + m_{,,} + \ldots$$

u. s. w. und auf ähnliche Art verfährt man bei der Berechnung der mit (lx), etc. und (pp), etc. bezeichneten Grössen. Man kann hiebei noch bemerken, dass man durch die im Art. 68 gegebenen Gleichungen

$$P + P_{,} + P_{,,} + \ldots = Q + Q' + Q'' + \ldots$$
$$(lx) + (lx') + (lx'') + \ldots = 0$$

eine Controle der numerischen Rechnung erhält. Man braucht hier nicht die Division, die zur Erlangung des arithmetischen Mittels erforderlich ist, auszuführen, sondern kann sogleich die Summe dieser Gyri ansetzen, die unmittelbar zur Berechnung der mit (lx), (lx'), etc. bezeichneten Grössen dienen.

81.

Es ist hier der Ort die Betrachtung des Falles einzuschalten, in welchem nicht die Richtungen, sondern statt dessen unmittelbar die Winkel zwischen den Dreieckspunkten beobachtet worden sind. Es kann dieser Fall wohl noch hie und da bei neueren Triangulationen vorkommen, aber wenn man ältere Triangulationen zu berechnen oder zu untersuchen hat, so findet man denselben immer vor.

Nehmen wir zuerst den Fall an, dass nur die von einander unabhängigen Winkel auf der Station beobachtet sind, so hindert nichts die durch diese Beobachtungen erhaltenen Werthe derselben mit y, y', y'', etc. zu bezeichnen, und hiemit wird die Aufgabe sofort auf den speciellen Fall des Art. 55 hingeführt. Da jetzt sehr wohl die verschiedenen Winkel verschiedene Gewichte haben können, indem die Beobachtung des einen mehrmals wiederholt worden sein kann wie die irgend eines anderen, so sind demgemäss die a. a. O. vorkommenden, mit p, p', p'', bezeichneten Gewichte zu bestimmen.

Nehmen wir dagegen an, dass ausser den einzelnen Winkeln auch Winkel beobachtet worden sind, in welchen jene enthalten sind, wie die Ergänzung aller übrigen Winkel zum Umkreise, oder Summen zweier oder mehrerer einzelner Winkel, so entstehen hieraus Bedingungsgleichungen, die nicht zu denen gehören, die das Dreiecksnetz an sich darbietet, und die ich daher locale Bedingungsgleichungen nennen will. Verweist man diese Bedingungsgleichungen in den zweiten Theil der allgemeinen Auflösung, wie bisher immer geschehen ist, so bleibt der specielle Fall des Art. 55 zwar bestehen, aber der zweite Theil der Auflösung wird unnöthigerweise verlängert. Da aber die Berechnung dieses zweiten Theils, in den Fällen, wo die Anzahl der Bedingungsgleichungen gross ist, bei Weitem die grössere Arbeit bei der Ausgleichung der Beobachtungen eines Dreiecksnetzes verursacht, so ist es von wesentlichem Vortheil diesen nicht unnöthiger Weise zu verlängern. Die Aufnahme der localen Bedingungsgleichungen in diesen zweiten Theil der Auflösung ist aber eine unnöthige Verlängerung desselben, da sie auf einfache Weise in dem ersten Theile berücksichtigt werden können. Zwar hört alsdann die Auflösung auf, in Bezug auf die betreffenden Stationen, dem speciellen Falle des Art. 55 anzugehören, aber die kleine Vermehrung des ersten Theils der Auflösung, die dadurch entsteht, wird bei Weitem durch die Abkürzung des zweiten Theils aufgewogen.

Man kann jeden gemessenen Winkel in zwei Richtungen zerlegen, oder als den Unterschied von zwei Richtungen betrachten, von welchen die eine ganz willkührlich ist. Jeder gemessene Winkel lässt sich daher wie ein Gyrus von zwei Richtungen betrachten, und stellt man alle auf einer Station beobachteten Winkel in dieser Form auf, und löst die dadurch erhaltenen Gleichungen den Erklärungen des Vorhergehenden gemäss auf, so ergeben sich die Werthe von y, y', y'', etc. in welchen die localen Bedingungsgleichungen volle Berücksichtigung erfahren haben, und daher im zweiten Theil der Auflösung nicht beachtet zu werden brauchen.

Man kann hiebei noch Folgendes bemerken. Nimmt man die vorläufigen Werthe der den unabhängigen Winkeln entsprechenden Richtungen so an, dass sie den Beobachtungen vollständig entsprechen, so werden alle diesen Richtungen zukommenden Werthe der mit l bezeichneten Grössen gleich Null, und in so fern keine abhängigen Winkel auf der betreffenden Station beobachtet worden sind, führt die im Vorher-

gehenden erklärte Auflösung unmittelbar auf die Werthe $y = 0$, $y' = 0$, $y'' = 0$, etc., wodurch der specielle Fall des Art. 55 wieder herbei geführt ist. Sind aber auf dieser Station auch abhängige Winkel beobachtet, dann werden in den aus diesen entspringenden Gyri die beiden dazu gehörigen l nicht gleich Null, und die aus der Auflösung aller Gleichungen hervorgehenden Werthe von y, y', etc. werden im Allgemeinen auch nicht mehr gleich Null.

82.

Ehe ich zur Anwendung des zweiten Theils der allgemeinen Auflösung auf die Geodäsie übergehe, will ich das Vorhergehende durch ein Beispiel erläutern, welches ich aus der von mir vor ohngefähr 30 Jahren zum Zweck einer staatsöconomischen Landesvermessung ausgeführten Triangulation des hiesigen Herzogthums entlehne. Selbstverständlich würde es zu weit führen, wenn ich hier diese ganze Triangulation anführen und berechnen wollte, ich muss mich damit begnügen aus derselben einige zusammenhängende Dreiecke auszuwählen, und die Berechnung dieser, als ein Ganzes betrachtet, zu zeigen.

Es wurden bei dieser Triangulation auf allen Stationen nicht die Winkel für sich, sondern die Richtungen eingeschnitten und beobachtet, und da auf fast jeder Station eine grosse Anzahl von Punkten einzuschneiden war, so wurden in keinem Gyrus Alle eingeschnitten, sondern, wie im Art. 64 erklärt worden ist, verfahren, und möglichst viele Combinationen der einzuschneidenden Punkte gebildet, deren jede einen Gyrus bildete. Da demzufolge die oft genannte Gaussische Auflösung auf die Berechnung dieses Dreiecksnetzes nicht angewandt werden konnte, so entwarf ich schon damals die hier erklärte, wandte sie bei der Berechnung an, und veröffentlichte die Endformeln ohne deren Ableitung im 16. Bande der Schum. A. N.

Ich führe noch an, dass zu dieser Triangulation blos 8zöllige Theodoliten angewandt wurden, deren Nomen unmittelbar 10" gaben.

83.

Aus der oben genannten Triangulation werde ich nun für das hier zu berechnende Beispiel die fünf Stationen, oder Dreieckspunkte, Seeberg, Inselsberg, Wachsenburg, Warte, Hörselsberg auswählen und berechnen.

Ich bemerke hiezu im Voraus, dass die Bezeichnung der Richtungen und anderer in Betracht kommenden Grössen mit Buchstaben, wie im Vorhergehenden geschehen ist, wohl in der Ableitung der Relationen, auf die die Auflösung der Aufgabe führt, zweckmässig ist, dass man sich aber in der Anwendung, und namentlich bei grossen Triangulationen, weit zweckmässiger der Zahlen zur Bezeichnung bedient. Es sollen daher auch hier diese und zwar so angewandt werden, dass nicht nur jede Station, sondern auch jede Richtung mit einer Zahl bezeichnet wird. Die oben genannten fünf Stationen werde ich mit (1), (2), (3), (4), (5) bezeichnen, so dass

Seeberg . . .	(1)
Warte	(2)
Inselsberg . . .	(3)
Wachsenburg . .	(4)
Hörselsberg . .	(5)

zur Bezeichnung erhält. Die Richtungen nach den Dreieckspunkten werde ich gleichfalls mit den fortlaufenden Zahlen so bezeichnen, dass auf jeder Station mit der (1) angefangen wird. Wo es nöthig wird die Stationen zu unterscheiden, kann die Stationsnummer der Richtungsnummer rechts unten als Index angehängt werden, so dass allgemein $(r)_s$, wo r die Richtungsnummer und s die Stationsnummer bedeutet, die Bezeichnung irgend einer Richtung wird. Ins Besondere sollen im Folgenden

$(r)_s$ der vorläufig angenommene Werth irgend einer Richtung

$w(r)_s$ die im ersten Theile der Auflösung zu berechnende Verbesserung derselben,

$y(r)_s$ der hieraus folgende Werth derselben bedeuten, so dass

$$y(r)_s = (r)_s + w(r)_s'$$

wird. Die Coefficienten (aa), (ab), etc. (bb), etc. des Vorhergehenden sollen, in so weit sie Dreieckspunkten angehören, mit

$$(1,1)_s\,,\ (1,2)_s\,,\ \text{etc.}\ (2,2)_s$$

bezeichnet, und überhaupt diese Bezeichnungsart auch auf andere Grössen ausgedehnt werden. Im ersten Theile der Auflösung wird man den Index s grösstentheils weglassen können, und nur bei jeder Station allgemein angeben.

84.

Mit der Station Seeberg = (1) anfangend, werde ich mit Weglassung der Stationsnummer den hier von den dort überhaupt beobachteten Richtungen aufzunehmenden die folgenden Bezeichnungen geben,

(1)	=	Richtung nach Station (3)
(2)	=	» » » (5)
(4), (3)	=	» » » (2)
(3), (4)	=	» » » (4)
(a)	=	» nach Trügleben
(b)	=	» » kl. Rettbach.

Die Richtungen (*a*) und (*b*), die hier mit aufgenommen worden sind, gehören keinem der übrigen hier in Betracht zu ziehenden Dreieckspunkten an, und es tritt daher hier der Fall ein, der im Art. 79 erläutert wurde. Diese beiden Richtungen habe ich, wie dort vorgeschrieben wurde, aus ihrer natürlichen Reihenfolge herausgenommen, und den übrigen nachgestellt. Es ist nothwendig zu erklären, weshalb diese beiden Richtungen hier mit aufgenommen worden sind.

Statt auf dem Dache der vormaligen Sternwarte auf dem Seeberge zu beobachten, wie früher geschehen ist, zog ich vor die Theodoliten auf in die Erde eingemauerte Steinpfeiler aufzustellen, da aber hier das neben liegende Gebäude der Sternwarte fast 180° des Horizonts verdeckte, so mussten zwei solcher Steinpfeiler, einer nördlich und einer südlich vom Gebäude angewandt werden. Um unter diesen Umständen eine sichere Verbindung zwischen den von jedem dieser beiden Standpunkte aus beobachteten Richtungen herzustellen, wurden mehrere Gegenstände aufgesucht, die auf beiden Standpunkten sichtbar waren, und häufig mit eingeschnitten. Solche sind die oben mit (*a*) und (*b*) bezeichneten. Die Wachsenburg war übrigens auch von beiden Standpunkten aus sichtbar.

Da hier nicht bezweckt wird, die definitive Berechnung dieser Triangulation zu geben, sondern einen Auszug aus derselben als Erläuterung des Vorhergehenden aufzustellen, so halte ich es nicht für nothwendig die Beobachtungen jedes einzelnen Gyrus anzugeben, sondern begnüge mich die Summen der Gruppen, nachdem davon die vorläufig angenommenen Werthe der Richtungen abgezogen worden sind, anzu-

führen. Diese sind, nachdem die erforderlichen Centrirungen berücksichtigt worden waren, nebst den vorläufig angenommenen Werthen der Richtungen in dem folgenden Täfelchen enthalten.

Station (1).

	r	Vorl. Werthe.	Anzahl d. Beob. u. die Summen dieser.				
			9	3	1	2	6
	(1)	63°14′10″	—	5″60	—	—	—
	(2)	96 29 52	—	—	2″40	—	—
(4)	(3)	215 58 17	—	—	—	—	4.00
(3)	(4)	308 51 37	—	—	—	4″60	—
	(*a*)	106 2 29	3″30	3.85	1.70	3.20	2.20
	(*b*)	269 57 23	1.60	—	—	—	—
		S =	4.90	9.45	4.10	7.80	6.20
		M =	2.45	4.725	2.050	3.900	3.100

	r	7	9	5	1	2	13	5	1
	(1)	—	—	0″20	—	—	—	—	—
	(2)	—	—	15.25	1″15	—	—	—	—
(4)	(3)	3″80	—	—	—	0″20	—	0″70	3″60
(3)	(4)	—	3″10	—	3.42	3.40	27″60	—	1.55
	(*a*)	—	—	—	—	—	17.70	13.20	—
	(*b*)	2.75	1.03	—	—	—	0.80	0.15	3.65
	S	6.55	4.13	15.45	4.57	3.60	46.10	14.05	8.80
	M	3.275	2.065	7.225	2.285	1.800	15.367	4.683	2.933

	r	2	1	2	1	2	1	2	2
	(1)	—	3″65	5″40	5″30	0″00	2″15	—	5″90
	(2)	—	—	4,80	4.35	10.20	—	7″00	2.30
(4)	(3)	1″10	—	—	—	—	—	—	—
(3)	(4)	0.20	—	—	—	—	4.10	0.00	0.62
	(*a*)	4.50	7.70	3.40	—	7.88	3.30	3.20	4.60
	(*b*)	—	2.12	—	3.05	1.70	6.10	7.00	—
	S	5.80	13.47	13.60	12.70	19.78	15.65	17.20	13.42
	M	1.933	4.490	4.533	4.233	4.945	3.912	4.300	3.355

Ausser den Nummern der Richtungen, und den vorläufigen Werthen derselben giebt diese Tafel in der obersten Zeile die Anzahl der gleichartigen Gyri, deren Summen, nach Abzug der vorläufigen Werthe

darunter stehen. Durch Hinzufügung einer angemessenen Constante zu den Beobachtungen einer jeden Gruppe kann man bewirken, dass jede dieser Summen klein und positiv wird.

Da allen Beobachtungen hier derselbe Werth beigelegt werden wird, so sind die Zahlen der obersten Zeilen zugleich die Gewichte der betreffenden Gruppe von Gyris.

Neben der Bezeichnung S folgt die Summe der Summen jeder Columne, und neben M das arithmetische Mittel derselben.

Es muss nun jedes dieser arithmetischen Mittel von den Zahlen derselben Columne abgezogen werden, und diese Unterschiede dürfen nicht weiter geändert werden. Sie sind in der folgenden Tafel aufgestellt, und zwar in entgegengesetzter Anordnung, nemlich so, dass alle Zahlen, die derselben Gruppe von Gyris angehören, in Einer Zeile stehen. Dieser Tafel sind überdies die Gewichte p, und die Zahlenwerthe P, $P_{,}$, etc. Q, Q', etc. $\frac{p^2}{P}$, $\frac{p_{,}^2}{P'}$, etc. und (lx), (lx'), etc. einverleibt, die nach den im Vorhergehenden dafür entwickelten Regeln berechnet worden sind. Die Gruppen von Gyris habe ich mit laufenden Nummern versehen.

			pl'''	pl''					
Nr.	pl	pl'	pl''	pl'''	pl^{IV}	pl^{V}	p	P	$p^2 : P$
1	—	—	—	—	+0"85	−0"85	9	18	4.5
2	+0"875	—	—	—	−0.875	—	3	6	1.5
3	—	+0"35	—	—	−0.35	—	1	2	0.5
4	—	—	—	+0"70	−0.70	—	3	6	1.5
5	—	—	+0"90	—	−0.90	—	6	12	3.0
6	—	—	+0.525	—	—	−0.525	7	14	3.5
7	—	—	—	+1.035	—	−1.035	9	18	4.5
8	−7.025	+7.025	—	—	—	—	5	10	2.5
9	—	−1.135	—	+1.135	—	—	1	2	0.5
10	—	—	−1.60	+1.60	—	—	2	4	1.0
11	—	—	—	+12.235	+2.332	−14.567	13	39	4.333
12	—	—	−3.983	—	+8.516	−4.533	5	15	1.667
13	—	—	+0.667	−1.383	—	+0.716	1	3	0.333
14	—	—	−0.833	−1.733	+2.566	—	2	6	0.667
15	−0.84	—	—	—	+3.21	−2.37	1	3	0.333
16	+0.866	+0.267	—	—	−1.133	—	2	6	0.667
17	+1.067	+0.116	—	—	—	−1.183	1	3	0.333
18	−4.945	+5.255	—	—	+2.935	−3.245	2	8	0.5
19	−1.763	—	—	+0.188	−0.613	+2.188	1	4	0.25
20	—	+2.70	—	−4.30	−1.10	+2.70	2	8	0.5
21	+2.545	−1.055	—	−2.735	+1.245	—	2	8	0.5
(lx), etc.	−9"220	+13"523	−4"324	+6"742	+15"983	−22"704		195	
Q, etc.	17	16	23	36	52	51			
			+6"742	−4"323					
			36	23					

Die Berechnung der (pp), (pp'), etc. gab die nachfolgenden Werthe derselben,

				p'''	p''		
		p	p'	p''	p'''	p^{iv}	p^{v}
	p	6.5833	4.5	0	0.75	3.75	1.4167
	p'		6.0	0	1.5	2.6667	1.3333
p'''	p''			10.1667	2.0	5.3333	5.5
p''	p'''				14.0833	7.75	9.9167
	p^{iv}					20.4167	12.0833
	p^{v}						20.75

Da hier (pp'') und $(p'p'')$ Null sind, so tritt der im Art. 76 vorgesehene Fall ein, dass die Bestimmung der N, N', N'' bei der oben gewählten Reihenfolge der Richtungen unmöglich wird, aber man sieht sogleich, dass die Möglichkeit dieser Bestimmung wieder herbei geführt wird, wenn man die Aufeinanderfolge der Richtungen (3) und (4) umwechselt. Man braucht deshalb die Täfelchen nicht umzuschreiben, sondern die Andeutungen, die ich oben hinzugefügt habe, gnügen vollständig. Nur muss man jetzt die neuen Nummern dieser beiden Richtungen bis ans Ende der ganzen Rechnung unverändert beibehalten. Diesem entsprechend ergaben sich nun die numerischen Werthe der N, N', etc. wie folgt,

$$N = 1.5\,,\quad N' = 3.0$$
$$N'' = 0.5\,,\quad N''' = 0$$
$$N^{iv} = 2.5\,,\quad N^{v} = 0.9444$$

und die der Coefficienten (aa), $(bb,1)$, etc., wobei jedoch zu bemerken ist, dass ich bez. 1, 2, 3, 4, a, b statt a, b, c, d, e, f geschrieben habe, und damit fortfahren werde, da mir in der Anwendung diese Bezeichnung zweckmässiger scheint wie jene, die nur bei der Herleitung der Formeln den Vorzug verdiente. In der Folge muss man daher unter

$$\begin{array}{l} (1,1),\ (1,l),\ (2,2,1),\ (2,3,1),\ \text{etc.}\ (2,l,1) \\ \qquad\qquad\qquad (3,3,2),\ (3,4,2),\ \text{etc.}\ (3,l,2) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (4,4,3),\ \text{etc.}\ (4,l,3) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{etc.} \end{array}$$

jene Coefficienten verstehen.

	1	2	3	4	a	b	l
1	12.6667	0	0	0	0	0	— 9″220
2		19.0	0	0	4.8333	1.5	+13.523
3			22.1667	—2.0	—6.5	—9.4444	+ 6.742
4				12.8333	—5.3333	—5.5	— 4.324
a					37.8333	—9.7222	+15.983
b						31.1420	—22.704
l							174.367

Durch die Auflösung der Gleichungen, die von diesen Coefficienten gebildet werden, ergaben sich nach und nach in vollständiger Aufzählung

			χ' +(9.86207)
γ'' 0,	δ'' —(9.40550),	ε'' —(8.89734),	χ'' —(9.85233)
γ''' +(8.95533),	δ''' +(9.46721),	ε''' +(9.62948),	χ''' —(9.48309)
	δ^{IV} +(9.67011),	ε^{IV} +(9.70073),	χ^{IV} +(9.46777)
		ε^{V} +(9.69573),	χ^{V} —(9.60243)
			χ^{VI} +(0.01274)

wo die in Klammern eingeschlossenen Zahlen die Logarithmen sind, ferner

(1,1) 12.6667						(1,l) —9.220
	(2,2,1) 19.0			(2,a,1) +4.8333,	(2,b,1) +1.5,	(2,l,1) +13.523
		(3,3,2) 22.1667,	(3,4,2) —2.0,	(3,a,2) —6.5,	(3,b,2) —9.4444,	(3,l,2) +6.746
			(4,4,3) 12.6528,	(4,a,3) —5.9198,	(4,b,3) —6.3528,	(4,l,3) —3.715
				(aa,4) 31.9281,	(ab,4) —15.8451,	(al,4) +12.782
					(bb,5) 15.9468,	(bl,5) —16.422
						(ll,6) 132.861

und ausserdem noch

$$\beta'' = 0\,,\quad \beta^{v} = -\,(9.40550)\,,\quad \beta' = -\,(9.31217)$$
$$\gamma^{v} = +\,(9.52562)\,,\quad \gamma' = +\,(9.80472)$$
$$\delta' = +\,(9.86583)$$

Hieraus erhielt ich die Verbesserungen der Richtungen und die Werthe derselben nach der Ausgleichung auf der Station wie folgt:

$$\begin{aligned} w(1) &= -\,0''728\,, & y(1) &= 63^\circ 40'\ 9''272 \\ w(2) &= +\,0.821\,, & y(2) &= 96\ 29\ 52.821 \\ w(3) &= -\,0.245\,, & y(3) &= 305\ 51\ 36.755 \\ w(4) &= -\,0.862\,, & y(4) &= 215\ 58\ 16.138 \\ w(a) &= -\,0.111\,, & y(a) &= 106\ \ 5\ 28.889 \\ w(b) &= -\,1.030\,, & y(b) &= 269\ 57\ 21.970\,, \end{aligned}$$

womit diese Rechnung geschlossen ist.

85.

Da ich bei der Berechnung der Ausgleichung auf der Station (1) ausführlich gewesen bin, so kann ich die übrigen Stationen kürzer darstellen. Für die Beobachtungen auf der Station (2) = Warte wurden die folgenden Bezeichnungen angewandt

(1) Richtung nach der Station (1)
(2) » » » » (3)
(3) » » » » (5)
(4) » » » » (4)

Ueberzählige Punkte sind hier nicht vorhanden. Die beiden Täfelchen, die die Vorbereitung der Beobachtungen enthalten, sind hier die folgenden.

Station (2).

r	Vorl. Werthe	Anzahl d. Beob. u. die Summen dieser.							
		4	6	15	12	2	2	1	2
(1)	27°55′ 7″	2″80	4″20	2″50	—	3″70	—	2″10	3″20
(2)	45 16 35	6.20	—	—	—	—	4″00	3.60	2.95
(3)	64 53 36	—	8.00	—	21″50	4.70	7.60	1.90	7.20
(4)	342 17 12	—	—	3.55	0.00	0.10	3.60	—	5.60
	S	9.00	12.20	6.05	21.50	8.50	15.2	7.60	18.95
	M	4.50	6.10	3.025	10.75	2.833	5.067	2.533	4.738

Nr.	pl	pl'	pl''	pl'''	p	P	$p^2 : P$
1	—1"700	+1"700	—	—	4	8	2.0
2	—1.900	—	+1"900	—	6	12	3.0
3	—0.525	—	—	+0"525	15	30	7.5
4	—	—	+10.750	—10.750	12	24	6.0
5	+0.867	—	+1.866	—2.733	2	6	0.6667
6	—	—1.067	+2.533	—1.466	2	6	0.6667
7	—0.433	+1.066	—0.633	—	1	3	0.3333
8	—1.538	—1.787	+2.462	+0 863	2	8	0.5
(lx),etc.	—5"229	—0"088	+18"878	—13"561		97	
Q, etc.	30	9	25	33			

Hieraus ergeben sich erstens die folgenden numerischen Werthe der (pp), (pp'), etc.

	p	p'	p''	p'''
p	14.0	2.8333	4.5	8.6667
p'		3.5	1.5	1.1667
p''			11.1667	7.8333
p'''				15.3333

ferner

$$N = 2.9115,\ N' = 0.9718,\ N'' = 1.5435,\ N''' = 2.9726$$

und die (1,1), (2,2,1), etc.

	1	2	3	4	l
1	24.5	0	0	0	—5"229
2		6.4444	0	1.7272	—0.088
3			16.2156	—3.2451	+18.878
4				26.5032	—13.561
l					40.558

Die Auflösung der Gleichungen giebt die Hülfsgrössen

$$(1,1) = 24.5\,,\quad (2,2,1) = 6.4444\,,\quad (3,3,2) = 16.2156$$
$$(4,4,3) = 25.3936\,,\quad (ll,4) = 13.713\,,$$
$$\log \beta'' = 9.42690n,\quad \log \gamma''' = 9.30129$$

die weiter unten wieder gebraucht werden, nebst

$$w(1) = -0''213\,,\quad y(1) = 27^\circ 55'\ \ 6''787$$
$$w(2) = +0.089\,,\quad y(2) = 45\ 16\ \ 35.089$$
$$w(3) = +1.087\,,\quad y(3) = 64\ 53\ \ 37.087$$
$$w(4) = -0.384\,,\quad y(4) = 342\ 17\ \ 11.616.$$

86.

Die auf der Station (3) = Inselsberg beobachteten Richtungen sind wie folgt bezeichnet worden,

(1) . . Richtung nach der Station (5)
(2) . . » » » » (1)
(3) . . » » » » (4)

und die Beobachtungen gaben die folgenden Zahlenwerthe

Station (3).

r	Vorl. Werthe	Anzahl d. Beob. u. die Summen ders.			
		14	5	9	5
(1)	179°43′ 9″	9″40	4″50	—	2″10
(2)	243 45 35	1.70	—	1″00	3.39
(3)	268 36 50	—	2.90	1.18	5.19
	S	11.10	7.40	2.18	10.68
	M	5.550	3.700	1.090	3.560

Nr.	pl	pl′	pl″	p	P	p²: P
1	+3″850	−3″850	—	14	28	7.0
2	+0.800	—	−0″800	5	10	2.5
3	—	−0.090	+0.090	9	18	4.5
4	−1.460	−0.170	+1.630	5	15	1.6667
(lx), etc.	+3″190	−4″110	+0″920		71	
Q, etc.	24	28	19			

Hiemit bekommt man

	p	p′	p″
p	11.1667	8.6667	4.1667
p′		13.1667	6.1667
p″			8.6667

$N = 2.4199$, $N' = 3.5818$, $N'' = 1.7219$

$(1,1) = 18.6893$
$(2,2,1) = 27.6600$
$(3,3,2) = 13.2982$, $(ll) = 3.340$, $(ll,3) = 2.120$

$w(1) = +0''171$, $y(1) = 179°43'\ 9''171$
$w(2) = -0.149$, $y(2) = 243\ 45\ 34.851$
$w(3) = +0.069$, $y(3) = 268\ 36\ 50.069$

87.

Die auf der Station (4) = Wachsenburg beobachteten Richtungen sind wie folgt bezeichnet worden,

(1) .. Richtung nach der Station (3)
(2) .. » » » » (1)
(3) .. » » » » (2)

und die Beobachtungen gaben die folgenden Zahlenwerthe,

Station (4).

r	Vorl. Werthe	Anzahl d. Beob. u. d. Summen ders.			
		9	5	7	1
(1)	88°37′44″	5″85	2″50	—	1″60
(2)	128 58 0	0.00	—	0.00	1.90
(3)	170 26 40	—	1.80	21.02	0.00
	S	5.85	4.30	21.02	3.50
	M	2.925	2.150	10.510	1.167

Nr.	pl	pl'	pl''	p	P	$p^2:P$
1	+2″925	−2″925	—	9	18	4.5
2	+0.35	—	−0″35	5	10	2.5
3	—	−10.51	+10.51	7	14	3.5
4	+0.433	+0.733	−1.166	1	3	0.3333
(lx), etc.	+3.708	−12″702	+8″994		45	
Q, etc.	15	17	13			

	p	p'	p''
p	7.3333	4.8333	2,8333
p'		8.3333	3.8333
p''			6.3333

$$N = 1.8901\,,\quad N' = 2.5572\,,\quad N'' = 1.4991$$

$$(1,1) = 11.2393$$
$$(2,2,1) = 15.2061$$
$$(3,3,2) = 8.9139\,,\quad (ll) = 35.594\,,\quad (ll,3) = 14.686$$

$$w(1) = +\ 0''330\,,\quad y(1) = 88^{0}37'\,44''330$$
$$w(2) = -\ 0.835\,,\quad y(2) = 128\ 57\ 59.165$$
$$w(3) = +\ 1.009\,,\quad y(3) = 170\ 26\ 41.009$$

88.

Die auf der Station (5) = Hörselsberg beobachteten Richtungen sind wie folgt bezeichnet worden,

(1) .. Richtung nach der Station (2)
(2) .. » » » » (1)
(3) .. » » » » (3)

und die Beobachtungen gaben die folgenden Zahlenwerthe,

Station (5).

r	Vorl. Werthe	Anzahl d. Beob. u. d. Summen ders.		
		9	5	11
(1)	252°59′37″	8″00	2″50	—
(2)	276 32 47	0.00	—	0″00
(3)	359 40 37	—	0.65	31.15
	S	8.00	3.15	31.15
	M	4.00	1.575	15,575

Nr.	pl	pl'	pl''	p	P	$p^2 : P$
1	+4″00	−4″00	—	9	18	4.5
2	+0.925	—	−0″925	5	10	2.5
3	—	−15.575	+15.575	11	22	5.5
(lx), etc.	+4.925	−19.575	+14.650		50	
Q, etc.	14	20	16			

	p	p'	p''
p	7.0	4.5	2.5
p'		10.0	5.5
p''			8.0

$$N = 1.4302\,,\quad N' = 3.1464\,,\quad N'' = 1.7480$$

$$(1,1) = 9.0455$$
$$(2,2,1) = 19.9000$$
$$(3,3,2) = 11.0556\,,\ (ll) = 48.002\,,\ (ll,3) = 6.652$$

$$w(1) = +\ 0''544\,,\quad y(1) = 252^0\,59'\,37''544$$
$$w(2) = -\ 0.984\,,\quad y(2) = 276\ 32\ 46.016$$
$$w(3) = +\ 1.325\,,\quad y(3) = 359\ 40\ 38.325$$

89.

Stellen wir nun die oben erhaltenen Resultate der Ausgleichungen auf den Stationen zusammen, und fügen die Hülfsgrössen hinzu, die im zweiten Theile der Auflösung unserer Aufgabe gebraucht worden.

Station Seeberg = (1)

$$y(1)_1 = 63^0\,40'\ 9''272$$
$$y(2)_1 = 96\ 29\ 52.821$$
$$y(3)_1 = 308\ 51\ 36.755$$
$$y(4)_1 = 215\ 58\ 16.138$$
$$y(a)_1 = 106\ \ 5\ 28.889$$
$$y(b)_1 = 269\ 57\ 21.970$$

$$(1,1)_1 = (1.10266)\,,\quad (4,4,3)_1 = (1.10219)$$
$$(2,2,1)_1 = (1.27875)\,,\quad (a,a,4)_1 = (1.50417)$$
$$(3,3,2)_1 = (1.34570)\,,\quad (b,b,5)_1 = (1.20268)$$

$$\beta'''_1 = 0\,,\quad \gamma'''_1 = +(8.95538)$$
$$\beta^{IV}_1 = -(9.40550)\,,\ \gamma^{IV}_1 = +(9{,}52562)\,,\ \delta^{IV}_1 = +(9.67011)$$
$$\beta^{V}_1 = -(9.31217)\,,\ \gamma^{V}_1 = +(9.80472)\,,\ \delta^{V}_1 = +(9.86583)\,,\ \varepsilon^{V}_1 = +(9.69573)$$

Station Warte = (2)

$$y(1)_2 = 27^0\,55'\ \ 6''787$$
$$y(2)_2 = 45\ 16\ 35.089$$
$$y(3)_2 = 64\ 53\ 37.087$$
$$y(4)_2 = 342\ 17\ 11.616$$

$$(1,1)_2 = (1.38917)\,, \quad (3,3,2)_2 = (1.20993)$$
$$(2,2,1)_2 = (0.80918)\,, \quad (4,4,3)_2 = (1.40472)$$
$$\beta_2''' = -(9.42690)\,, \quad \gamma_2''' = +(9.30129)$$

Station Inselsberg = (3)

$$y(1)_3 = 179^0 43'\ 9''171$$
$$y(2)_3 = 243\ 45\ 34.851$$
$$y(3)_3 = 268\ 36\ 50.069$$

$$(1,1)_3 = (1.27159)$$
$$(2,2,1)_3 = (1.44185)$$
$$(3,3,2)_3 = (1.12378)$$

Station Wachsenburg = (4)

$$y(1)_4 = 88^0 37' 44''330$$
$$y(2)_4 = 128\ 57\ 59.165$$
$$y(3)_4 = 170\ 26\ 41.009$$

$$(1,1)_4 = (1.05073)$$
$$(2,2,1)_4 = (1.18201)$$
$$(3,3,2)_4 = (0.95006)$$

Station Hörselsberg = (5)

$$y(1)_5 = 252^0 59' 37''544$$
$$y(2)_5 = 276\ 32\ 46.016$$
$$y(3)_5 = 359\ 40\ 38.325$$

$$(1,1)_5 = (0.95641)$$
$$(2,2,1)_5 = (1.29889)$$
$$(3,3,2)_5 = (1.04356)$$

Zur Berechnung des mittleren Fehlers wird ausserdem noch die Summe der (ll,n) gebraucht, die ich hier mit W_0 bezeichnen will. In unserm Beispiel haben wir oben erhalten,

$$(ll,6)_1 = 132.861$$
$$(ll,4)_2 = 13.713$$
$$(ll,3)_3 = 2.120$$
$$(ll,3)_4 = 14.686$$
$$(ll,3)_5 = 6.652$$
$$W_0 = 170.032$$

Hiemit ist der erste Theil der Auflösung unserer Aufgabe vollständig beendigt.

90.

Mit dem Vorhergehenden ist zwar unser Beispiel in Bezug auf den ersten Theil der Auflösung unserer Aufgabe vollständig ausgeführt, da auch die Berechnung der mit ihren Gewichten multiplicirten Summe der der Quadrate der übrigbleibenden Fehler hinzugefügt worden ist. Ehe ich aber zum zweiten Theil der Auflösung übergehe will ich noch zeigen, wie man die im Art. 65 eingeführten, und mit u, $u_{,}$, etc. bezeichneten Grössen berechnen kann. Im Allgemeinen braucht man die Werthe dieser nicht zu kennen, allein es können Fälle eintreten, wo man sie kennen zu lernen wünscht, z. B. wenn man die von der Ausgleichung auf den Stationen herrührenden Theile der Summen der Fehlerquadrate, nicht nur durch das im Vorhergehenden dafür gegebene Verfahren, sondern auch direct berechnen will. Zur Bezeichnung der u werde ich jetzt $u(m)_s$ wählen, wo m die laufende Summe der Gruppe von Gyris, und s wieder die Stationsnummer bezeichnet. Nehmen wir nun wie früher an, dass

$$p = p' = p'' = \text{etc.}$$
$$p_{,} = p_{,}' = p_{,}'' = \text{etc.}$$
$$\text{etc.}$$

so geben die Gleichungen (65) zur Berechnung der $u(m)_s$ den folgenden allgemeinen Ausdruck

$$u(m)_s = -\frac{p_{m-1}}{P_{m-1}} \Sigma w(r)_s$$

wo $w(r)_s$ wieder die Verbesserung der Richtungen auf den Stationen bezeichnet, und unter dem Summenzeichen nur die in der betr. Gruppe von Gyris vorhandenen Richtungen aufgenommen werden dürfen, z. B.

$$u(1)_1 = -\tfrac{1}{2}(w(a)_1 + w(b)_1) = +0''571$$
$$u(9)_1 = -\tfrac{1}{2}(w(a)_1 + w(4)_1) = +0.021$$
$$u(14)_1 = -\tfrac{1}{3}(w(3)_1 + w(4)_1 + w(a)_1) = +0.406$$
$$u(21)_1 = -\tfrac{1}{4}(w(1)_1 + w(2)_1 + w(4)_1 + w(a)_1) = +0.220$$
$$u(1)_2 = -\tfrac{1}{2}(w(1)_2 + w(2)_2) = +0.062$$
$$u(4)_2 = -\tfrac{1}{2}(w(3)_2 + w(4)_2) = -0.352$$
$$u(8)_2 = -\tfrac{1}{4}(w(1)_2 + w(2)_2 + w(3)_2 + w(4)_2) = -0.145$$
$$u(1)_3 = -\tfrac{1}{2}(w(1)_3 + w(2)_3) = -0.011$$
$$u(4)_3 = -\tfrac{1}{3}(w(1)_3 + w(2)_3 + w(3)_3) = -0.030$$

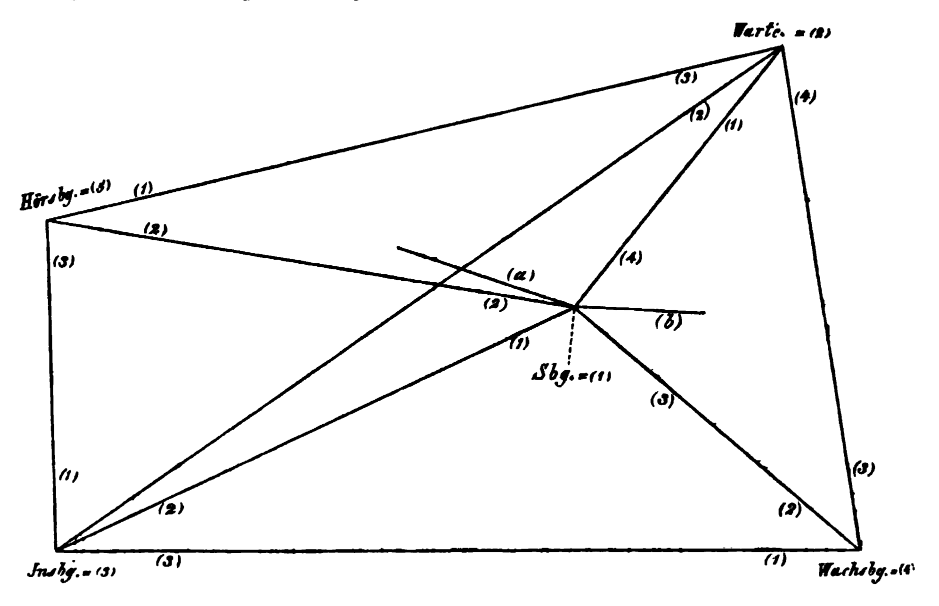
u. s. w. Wenn die oben unter den Gewichten p angenommenen Rela-

tionen nicht stattfinden, so erkennt man aus den Ausdrücken (65) leicht wie verfahren werden muss.

91.

Die Abänderungen, die der zweite Theil der Auflösung der allgemeinen Aufgabe in der Anwendung auf die Geodäsie erfährt, sind von der Beschaffenheit, dass sie am Einfachsten durch ein Beispiel eingesehen werden; es soll daher das im Vorhergehenden angefangene Beispiel sogleich fortgesetzt, und die anzuwendenden Ausdrücke sollen an den betreffenden Stellen erläutert werden.

Vor Allem sind nun die Bedingungsgleichungen, die das Dreiecksnetz liefert, aufzusuchen und aufzustellen, und dazu ist eine Figur desselben sehr dienlich, die jedoch auf keine sonderliche Genauigkeit in Betreff ihrer Verhältnisse Anspruch zu machen braucht. Es ist ausreichend, wenn sie alle Dreiecke ihrer ohngefähren Lage nach, so wie die Angaben aller beobachteten Richtungen oder Winkel enthält. Für unser Beispiel ist die folgende Figur eine solche.



Um die Zahl der vorhandenen Bedingungsgleichungen zu erhalten muss man das Dreiecksnetz als ein Polygon von eben so vielen Seiten betrachten, als Dreieckspunkte vorhanden sind, und von dem Grundsatz ausgehen, dass ein Polygon von n Seiten völlig bestimmt ist, wenn man in demselben ausser Einer Seite $2(n-2)$ von einander unabhängige

Winkel kennt. Sei nun die Anzahl aller beobachteten Richtungen m, die vor Allem so beschaffen sein müssen, dass das Dreiecksnetz in keinem seiner Punkte unbestimmt wird, und darunter q theils willkührliche Richtungen, theils solche, die nicht nach Dreieckspunkten hinzielen, dann wird die Anzahl der vorhandenen Bedingungsgleichungen

$$= m - q - 2(n - 2)$$

In unserm Beispiel ist $m = 19$, und da auf jeder Station Eine Richtung willkührlich ist, und ausserdem die zwei Richtungen $(a)_1$ und $(b)_1$ vorkommen, die nach keinem Dreieckspunkte hinzielen, so ist $q = 7$, ferner ist hier $n = 5$, und folglich sind 6 von einander unabhängige Bedingungsgleichungen vorhanden.

Die Bedingungsgleichungen, die ein Dreiecksnetz darbietet, zerfallen in zwei Gattungen, erstens in die, welche die Summen der Winkel der Drei- oder Mehrecke geben, und die man die Winkelgleichungen nennt, und zweitens in die, welche die Proportionalität der Sinusse der Winkel und der gegenüber liegenden Seiten darbietet, nachdem daraus die Seiten eliminirt worden sind; diese nennt man die Seitengleichungen. Man hat bei der Aufstellung derselben darauf zu sehen, dass keine in den übrigen enthalten sei, und dieses ist leicht zu erreichen, wenn man das Dreiecksnetz nach und nach aus einem einzigen seiner Dreiecke zusammen setzt. Das Dreieck, welches man hiebei als Grundlage wählt, kann man aus allen vorhandenen beliebig auswählen. Dieses Dreieck kann höchstens Eine Winkelgleichung geben. Knüpft man nun erst einen vierten Punkt daran, und findet in den vorhandenen Beobachtungen, dass zur Bestimmung desselben k Winkel nach demselben, und l Winkel von demselben beobachtet worden sind, so bietet er $k + l - 2$ Bedingungsgleichungen dar, unter welchen sich höchstens l Winkelgleichungen befinden, während die übrigen $k - 2$ Seitengleichungen sind. Es kann sich jedoch auch ereignen, dass die Anzahl der Winkelgleichungen kleiner wie l, und die Zahl der Seitengleichungen dem entsprechend grösser wie $k - 2$ wird. Die Anknüpfung eines fünften, sechsten, u. s. w. Punktes wird eben so behandelt, bis das ganze Dreiecksnetz erschöpft ist. Die oben angegebene Anzahl aller Bedingungsgleichungen, die man auch auf beliebige Theile des Netzes anwenden kann, gewährt eine Controle dafür, dass man nicht zu viele oder zu wenige Bedingungsgleichungen angesetzt hat.

Wenden wir diese Sätze auf die obige Figur an, indem wir vom Dreiecke (1), (3), (4) ausgehen. Da in diesem alle drei Winkel beobachtet worden sind, so giebt es die einzig mögliche Bedingungsgleichung

$$(1)_1 - (3)_1 + (3)_3 - (2)_3 + (2)_4 - (1)_4 - 180^0\ 0'\ 0''634 = 0$$

indem 0″634 der sphärische Excess dieses Dreiecks ist. Knüpfen wir hieran den Dreieckspunkt (5), so zeigt die Figur, dass nach demselben 2, und von demselben 1 Winkel beobachtet worden sind. Dieser Punkt giebt daher nur Eine Winkelgleichung, nemlich

$$(2)_1 - (1)_1 + (2)_3 - (1)_3 + (3)_5 - (2)_5 - 180^0\ 0'\ 0''528 = 0$$

Wird hierauf der Dreieckspunkt (2) angeknüpft, so zeigt die Figur, dass nach demselben 3, und von demselben 3 Winkel beobachtet worden sind. Hierauf giebt die Figur ferner zu erkennen, dass statt der 3 Winkelgleichungen, und der einen Seitengleichung, die vermöge der allgemeinen Regel vorhanden sein sollten, in der That 2 Winkel- und 2 Seitengleichungen vorhanden sind. Diese sind

$$(4)_1 - (2)_1 + (3)_2 - (1)_2 + (2)_5 - (1)_5 - 180^0\ 0'\ 0''510 = 0$$
$$(3)_1 - (4)_1 + (1)_2 - (4)_2 + (3)_4 - (2)_4 - 180\ \ 0\ \ 0.420 = 0$$

$$\log . \sin [(2)_1 - (1)_1] \sin [(2)_2 - (1)_2] \sin [(3)_5 - (1)_5]$$
$$- \log . \sin [(4)_1 - (1)_1] \sin [(3)_2 - (2)_2] \sin [(3)_5 - (2)_5] = 0$$
$$\log . \sin [(1)_1 - (3)_1] \sin [(2)_2 - (1)_2] \sin [(3)_4 - (1)_4]$$
$$- \log . \sin [(4)_1 - (1)_1] \sin [(2)_2 - (4)_2] \sin [(2)_4 - (1)_4] = 0$$

Diese beiden Seitengleichungen entstehen aus den Dreiecken (1)(2)(3), (2)(3)(5), (1)(3)(5). und (1)(2)(3), (2)(3)(4), (1)(3)(4), und ich habe sie sogleich in logarithmischer Form angesetzt, weil sie in dieser am Einfachsten behandelt werden können. Mit den vorstehenden Gleichungen ist die Zahl 6 erfüllt, die vorher bestimmt wurde.

92.

Dem Vorhergehenden zufolge muss nun zuerst jede Bedingungsgleichung auf die Form

$$0 = F + \Sigma q(r)_s \,.\, \delta(r)_s$$

gebracht werden, wenn $\delta(r)_s$ irgend welche Aenderungen der Richtungen, und F so wie $q(r)_s$ bestimmte numerische Grössen bezeichnen; letztere sind identisch mit den im Art. 31 u. f. q, q', etc. r, r', etc. etc. benannten Coefficienten, und die F sind im Art. 51 erklärt. Wir bekom-

men demzufolge die vorstehende Form durch die Substitution des allgemeinen Ausdrucks

$$y(r)_s + \delta(r)_s$$

für die Richtungen, die im vor. Art. schlechtweg mit $(r)_s$ bezeichnet worden sind, und dabei nur die ersten Potenzen der $\delta(r)_s$ berücksichtigen. Die Substitution der im Art. 89 zusammen gestellten Werthe der $y(r)_s$ in die strengen Ausdrücke der Bedingungsgleichungen des vor. Art. giebt die Werthe der F, wobei in grösseren Dreiecken erforderlich werden kann, noch folgende Reductionen anzubringen: die Berücksichtigung der Unterschiede zwischen den astronomischen und dem geodätischen Azimuthen, und die des sphäroidischen Ueberschusses in Bezug auf die Kugel*). Man hat früher vorgeschrieben in den Seitengleichungen von jedem Winkel den dritten Theil des sphärischen Ueberschusses abzuziehen, allein dieses ist überflüssig, da sie sowohl für die Kugel wie für die Ebene gelten.

Die Coefficienten $q(r)_s$ bekommt man durch die Differentiation der Bedingungsgleichungen, und in den Winkelgleichungen haben sie immer theils die Werthe $+1$, theils -1. Dieselben Coefficienten der Seitengleichungen kann man auf zwei verschiedene Arten berechnen. Sie sind einestheils die Differenz des betr. log sin für Eine Secunde des Bogens, und anderentheils sind sie der Cotangente des Winkels, mit einer Constante multiplicirt gleich. Damit in den F die siebente Stelle des Briggischen Logarithmus, und in $\delta(r)_s$ die Secunde zur Einheit werden, müssen die Cotangenten der Winkel mit der Constante multiplicirt werden, deren $\log = 1.32335$ ist.

E s ist gänzlich einerlei, welches dieser beiden Verfahren man zur Berechnung dieser Coefficienten anwendet, wenn man diese nur in einer hinreichenden Anzahl von Stellen richtig berechnet.

Gleichwie im Vorhergehenden die Richtungen und die Stationen mit fortlaufenden arabischen Ziffern bezeichnet worden, eben so sollen von nun an die Bedingungsgleichungen, in der Reihenfolge in der man sie aufgestellt hat, mit fortlaufenden römischen Ziffern bezeichnet werden, und diese Bezeichnung sowohl wie jene soll, in allen Hülfsgrössen, die noch in Betracht kommen, statt der bei der Entwickelung des Verfahrens eingeführten, angewandt werden.

---

*) S. Geodätische Untersuchungen.

Es sind daher zunächst die Resultate der Substitution der Werthe der $y(r)_s$ in die obigen Bedingungsgleichungen mit $F(I)$, $F(II)$, bis $F(VI)$ zu bezeichnen, und demselben Grundsatze folgend, wird den Differentialquotienten, die oben allgemein mit $q(r)_s$ benannt worden, für die erste Bedingungsgleichung die Bezeichnung $q(r,I)_s$, für die zweite $q(r,II)_s$ u. s. w. gegeben werden. Die Substitution der $y(r)_s$ gab

$$F(I) = +1''936 \qquad F(IV) = -2''788$$
$$F(II) = +1.010 \qquad F(V) = -99.3$$
$$F(III) = +1.579 \qquad F(VI) = -53.5$$

und die beschriebene Differentiation gab zuerst die Ausdrücke

$$\delta(1)_1-\delta(3)_1+\delta(3)_3-\delta(2)_3+\delta(2)_4-\delta(1)_4 \text{ für } I$$
$$\delta(2)_1-\delta(1)_1+\delta(2)_3-\delta(1)_3+\delta(3)_5-\delta(2)_5 \text{ für } II$$
$$\delta(4)_1-\delta(2)_1+\delta(3)_2-\delta(1)_2+\delta(2)_5-\delta(1)_5 \text{ für } III$$
$$\delta(3)_1-\delta(4)_1+\delta(1)_2-\delta(4)_2+\delta(3)_4-\delta(2)_4 \text{ für } IV$$
$$+32.634\delta[(2)_1-(1)_1]+67.360\delta[(2)_2-(1)_2]-6.310\delta[(3)_5-(1)_5]$$
$$+40.106\delta[(4)_1-(1)_1]-59.073\delta[(3)_2-(2)_2]-2.536\delta[(3)_5-(2)_5] \text{ für } V$$
$$-9.733\delta[(1)_1-(3)_1]+67.360\delta[(2)_2-(1)_2]+3.028\delta[(3)_4-(1)_4]$$
$$+40.106\delta[(4)_1-(1)_1]-10.733\delta[(2)_2-(4)_2]-24.794\delta[(2)_4-(4)_4] \text{ für } VI$$

Zuerst ist hiebei zu bemerken, dass die Coefficienten der Seitengleichungen im Allgemeinen viel grösser sind wie die der Winkelgleichungen, und dieses wird immer der Fall sein. Obgleich dieser Umstand für die Erlangung des Endresultats durchaus von keiner Bedeutung ist, so trägt er doch dazu bei, um die Rechnungen etwas unbequem zu machen. Nun ist aber leicht durch das Vorhergehende sich davon zu überzeugen, dass man jede Bedingungsgleichung vor ihrer Anwendung mit einem beliebigen Factor multipliciren darf, und diese Eigenschaft kann man dazu benutzen, um die Coefficienten der Seitengleichungen denen der Winkelgleichungen beiläufig gleich zu machen.

Es sollen in Folge dieser Bemerkung die vorstehenden Ausdrücke für die beiden hier vorhandenen Seitengleichungen vor Allem mit der Zahl 50 dividirt werden, wodurch sie in die folgenden übergehen,

$$+0.65268\delta[(2)_1-(1)_1]+1.3472\ \delta[(2)_2-(1)_2]-0.12620\delta[(3)_5-(1)_5]$$
$$+0.80212\delta[(4)_1-(1)_1]-1.18146\delta[(3)_2-(2)_2]-0.05072\delta[(3)_5-(2)_5] \text{ für } V$$
$$-0.19466\delta[(1)_1-(3)_1]+1.3472\ \delta[(2)_2-(1)_2]+0.06056\delta[(3)_4-(1)_4]$$
$$+0.80212\delta[(4)_1-(1)_1]-0.21466\delta[(2)_2-(4)_2]-0.49588\delta[(2)_4-(4)_4] \text{ für } VI$$

In Folge dessen müssen die vorstehenden Werthe von $F(V)$ und $F(VI)$ mit derselben Zahl dividirt werden, und die weiter unten anzuwendenden Werthe derselben sind also nicht die vorstehenden, sondern die folgenden

$$F(V) = -1.986 \qquad F(VI) = -1.070$$

93.

Für die Berechnung eines so kleinen Dreiecksnetzes wie das unsers Beispiels könnte man sich immerhin begnügen die im vor. Art. erhaltenen Ausdrücke der Coefficienten der Bedingungsgleichungen blos zu ordnen, allein bei grossen Netzen wird man auf diese Art leicht die Uebersicht verlieren können. Es ist daher stets angemessen diese Coefficienten, und nicht minder die folgenden Hülfsgrössen tabularisch zusammen zu stellen, wodurch man bewirkt, dass die klare Uebersicht über das Ganze nie verloren gehen kann. Führen wir nun die im vor. Art. angekündigte neue Bezeichnung dieser Coefficienten ein, und setzen auch die Logarithmen statt der Zahlen an, so bekommen wir die folgende Tafel der Coefficienten der obigen Bedingungsgleichungen.

r	s	$\log q(r,I)_s$	$\log q(r,II)_s$	$\log q(r,III)_s$	$\log q(r,IV)_s$	$\log q(r,V)_s$	$\log q(r,VI)_s$
1	1	0.	0.n	—	—	0.16280n	9.99860n
2		—	0.	0.n	—	9.81470	—
3		0.n	—	—	0.	—	9.28926
4		—	—	0.	0.n	9.90424	9.90424
1	2	—	—	0.n	0.	0.12943n	0.12943n
2		—	—	—	—	0.40289	0.05406
3		—	—	0.	—	0.07242n	—
4		—	—	—	0.n	—	9.33174
1	3	—	0.n	—	—	—	—
2		0.n	0.	—	—	—	—
3		0.	—	—	—	—	—
1	4	0.n	—	—	—	—	9.63885
2		0.	—	—	0.n	—	9.69538n
3		—	—	—	0.	—	8.78220
1	5	—	—	0.n	—	9.10106	—
2		—	0.n	0.	—	8.70523	—
3		—	0.	—	—	9.24778n	—

94.

Gleichwie die bisher berechneten Grössen, so können auch alle folgenden stationsweise aufgestellt und berechnet werden, und die Bezeichnungen sollen den vorher eingeführten analog eingerichtet werden. Wir haben eben

$$q(1,I)_s\ ,\ q(2,I)_s\ ,\ q(3,I)_s\ ,\ \text{etc. statt}\ q,\ q',\ q'',\ \text{etc.}$$
$$q(1,II)_s\ ,\ q(2,II)_s\ ,\ q(3,II)_s\ ,\ \text{etc. statt}\ r,\ r',\ r'',\ \text{etc.}$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

des Art. 31 geschrieben, und demgemäss werden wir auch

$$\eta(1,I)_s\ ,\ \eta(2,I)_s\ ,\ \eta(3,I)_s\ ,\ \text{etc. statt}\ \eta,\ \eta',\ \eta'',\ \text{etc.}$$
$$\eta(1,II)_s\ ,\ \eta(2,II)_s\ ,\ \eta(3,II)_s\ ,\ \text{etc. statt}\ \varkappa,\ \varkappa',\ \varkappa'',\ \text{etc.}$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

des Art. 40, so wie

$$f(1,I)_s\ ,\ f(2,I)_s\ ,\ f(3,I)_s\ ,\ \text{etc. statt}\ (\alpha\eta),\ (\beta\eta),\ (\chi\eta),\ \text{etc.}$$
$$f(1,II)_s\ ,\ f(2,II)_s\ ,\ f(3,II)_s\ ,\ \text{etc. statt}\ (\alpha\varkappa),\ (\beta\varkappa),\ (\gamma\varkappa),\ \text{etc.}$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

des Art. 40 schreiben.

Es sollen nun die Ausdrücke für unser Beispiel diesem entsprechend aus den allgemeinen Ausdrücken ausgeschrieben werden, wobei jedoch sogleich bemerkt wird, dass dieses nicht unumgänglich nothwendig ist. Weiter unten bei der Zusammenstellung aller anzuwendenden Formeln werden diese so aufgestellt werden, dass man sie auf die grösstmögliche Triangulation anwenden kann, ohne specielle Auszüge daraus zu machen.

Mit Rücksichtnahme auf die Grössen, von welchen bei der Erklärung der Ausgleichung auf den Stationen gezeigt wurde, dass sie in unserm Verfahren immer Null werden, findet man aus den allgemeinen Ausdrücken leicht die folgenden, die sich speciell auf unser Beispiel beziehen.

Station (1)

$$\eta(1,I)_1 = q(1,I)_1$$
$$\eta(2,I)_1 = q(2,I)_1$$
$$\eta(3,I)_1 = q(3,I)_1$$
$$\eta(4,I)_1 = \beta'''_1 \cdot q(2,I)_1 + \gamma'''_1 \cdot q(3,I)_1 + q(4,I)_1$$
$$\eta(a,I)_1 = \beta^{IV}_1 \cdot q(2,I)_1 + \gamma^{IV}_1 \cdot q(3,I)_1 + \delta^{IV}_1 \cdot q(4,I)_1$$
$$\eta(b,I)_1 = \beta^{V}_1 \cdot q(2,I) + \gamma^{V}_1 \cdot q(3,I)_1 + \delta^{V}_1 \cdot q(4,I)_1$$

indem in Bezug auf die überzähligen Richtungen immer $q(a,I)_1$, $q(b,I)_1$, etc. Null sind.

Station (2)

$$\eta(1,I)_2 = q(1,I)_2$$
$$\eta(2,I)_2 = q(2,I)_2$$
$$\eta(3,I)_2 = q(3,I)_2$$
$$\eta(4,I)_2 = \beta'''_2 \cdot q(2,I)_2 + \gamma'''_2 \cdot q(3,I)_2 + q(4,I)_2$$

Stationen (3), (4) und (5)

$$\eta(1,I)_s = q(1,I)_s$$
$$\eta(2,I)_s = q(2,I)_s$$
$$\eta(3,I)_s = q(3,I)_s$$

wo für s nach und nach 3, 4, 5 zu schreiben sind.

Diese Ausdrücke sind speciell für die erste Bedingungsgleichung hingeschrieben, um sie auf die übrigen Bedingungsgleichungen auszudehnen ist weiter nichts nöthig wie in denselben statt der Zahl I sich nach und nach die Zahlen II, III, etc. zu denken. Es ist kein q als Null angenommen worden, da aber die vorstehende Tafel zeigt, dass viele derselben Null sind, so fallen die betreffenden Glieder der vorstehenden Ausdrücke von selbst weg. Die Anwendung derselben gab die folgenden Werthe.

r	s	$\log \eta(r,I)_s$	$\log \eta(r,II)_s$	$\log \eta(r,III)_s$	$\log \eta(r,IV)_s$	$\log \eta(r,V)_s$	$\log \eta(r,VI)_s$
1	1	0.	0. n	—	—	0.16280n	9.99860n
2		—	0.	0. n	—	9.81470	—
3		0. n	—	—	0.	—	9.28926
4		8.95533n	—	0.	9.95893n	9.90424	9.91364
a		9.52562n	9.40550n	9.85868	9.12192n	9.32064	9.64402
b		9.80472n	9.31217n	9.97287	8.98394n	9.65802	9.85315
1	2	—	—	0. n	0.	0.12943n	0.12943n
2		—	—	—	—	0.40289	0.05406
3		—	—	0.	—	0.07242n	—
4		—	—	9.30129	0. n	9.96009n	8.94453n
1	3	—	0. n	—	—	—	—
2		0. n	0.	—	—	—	—
3		0.	—	—	—	—	—
1	4	0. n	—	—	—	—	9.63885
2		0.	—	—	0. n	—	9.69538n
3		—	—	—	0.	—	8.78220
1	5	—	—	0. n	—	9.10106	—
2		—	0. n	0.	—	8.70523	—
3		—	0.	—	—	9.24778n	—

Aus dem Art. 40 erhalten wir ferner für unser Beispiel die folgenden Ausdrücke,

Station (1)

$$\begin{aligned}
f(1,I)_1 &= Q(1,I)_1 \\
f(2,I)_1 &= Q(2,I)_1 + \beta_1'''.Q(4,I)_1 + \beta_1^{IV}.Q(a,I)_1 + \beta_1^{V}.Q(b,I)_1 \\
f(3,I)_1 &= Q(3,I)_1 + \gamma_1'''.Q(4,I)_1 + \gamma_1^{IV}.Q(a,I)_1 + \gamma_1^{V}.Q(b,I)_1 \\
f(4,I)_1 &= Q(4,I)_1 + \delta_1^{IV}.Q(a,I)_1 + \delta_1^{V}.Q(b,I)_1 \\
f(a,I)_1 &= Q(a,I)_1 + \varepsilon_1^{V}.Q(b,I)_1 \\
f(b,I)_1 &= Q(b,I)_1
\end{aligned}$$

Station (2)

$$\begin{aligned}
f(1,I)_2 &= Q(1,I)_2 \\
f(2,I)_2 &= Q(2,I)_2 + \beta_2'''.Q(4,I)_2 \\
f(3,I)_2 &= Q(3,I)_2 + \gamma_2'''.Q(4,I)_2 \\
f(4,I)_2 &= Q(4,I)_2
\end{aligned}$$

Stationen (3), (4), (5)

$$\begin{aligned}
f(1,I)_s &= Q(1,I)_s \\
f(2,I)_s &= Q(2,I)_s \\
f(3,I)_s &= Q(3,I)_s
\end{aligned}$$

in welchen zur Abkürzung allgemein

$$Q(1,I)_s = \frac{\eta(1,I)_s}{(1,1)_s}\,,\quad Q(2,I)_s = \frac{\eta(2,I)_s}{(2,2,1)_s}\,,\quad Q(3,I)_s = \frac{\eta(3,I)_s}{(3,3,2)_s}\,,\ \text{etc.}$$

gesetzt worden ist. Die oben in Bezug auf die verschiedenen Bedingungsgleichungen aufgestellten Bemerkungen haben hier auch volle Geltung. Für unser Beispiel sind die Resultate der vorstehenden Ausdrücke in den folgenden Tafeln zusammen gestellt. Die Divisoren $(1,1)_s$, $(2,2.1)_s$, $(3,3,2)_s$, etc. findet man im Art. 89.

r	s	log $Q(r,I)_s$	log $Q(r,II)_s$	log $Q(r,III)_s$	log $Q(r,IV)_s$	log $Q'r,V)_s$	log $Q(r,VI)_s$
1	1	8.89734	8.89734n	—	—	9.06014n	8.89594n
2		—	8.72125	8.72125n	—	8.53595	—
3		8.65430n	—	—	8.65430	—	7.94356
4		7.85314n	—	8.89781	8.85674n	8.80205	8.81145
a		8.02145n	7.90133n	8.35451	7.61775n	7.81647	8.13985
b		8.60204n	8.10949n	8.77019	7.78126n	8.45534	8.65047
1	2	—	—	8.61083n	8.61083	8.74026n	8.74026n
2		—	—	—	—	9.59371	9.24488
3		—	—	8.79007	—	8.86249n	—
4		—	—	7.89657	8.59528n	8.55537n	7.53981n
1	3	—	8.72841n	—	—	—	—
2		8.55815n	8.55815	—	—	—	—
3		8.87622	—	—	—	—	—
1	4	8.94927n	—	—	—	—	8.58812
2		8.81799	—	—	8.81799n	—	8.51337n
3		—	—	—	9.04994n	—	7.83214
1	5	—	—	9.04351n	—	8.14465	—
2		—	8.70111n	8.70111	—	7.40634	—
3		—	8.95644	—	—	8.20422n	—

r	s	log $f(r,I)_s$	log $f(r,II)_s$	log $f(r,III)_s$	log $f(r,IV)_s$	log $f(r,V)_s$	log $f(r,VI)_s$
1	1	8.89734	8.89734n	—	—	9.06014n	8.89594n
2		8.03664	8.75814	8.84805n	7.36078	8.42862	8.10332n
3		8.87386n	8.03663n	8.71846	8.52349	8.41694	8.67923
4		8.61715n	8.11976n	9.12342	8.89364n	8.94156	9.01732
a		8.48224n	8.15695n	8.71481	7.85408n	8.31624	8.55619
b		8.60204n	8.10949n	8.77019	7.78126n	8.45534	8,65047
1	2	—	—	8.61083n	8.61083	8.74026n	8.74026n
2		—	—	7.32347n	8.02218	9.60421	9.24717
3		—	—	8.80101	7.89657n	8.90335n	6.84110n
4		—	—	7.89657	8.59528n	8.55537n	7.53981n
1	3	—	8.72841n	—	—	—	—
2		8.55815n	8.55815	—	—	—	—
3		8.87622	—	—	—	—	—
1	4	8.94927n	—	—	—	—	8.58812
2		8.81799	—	—	8.81799n	—	8.51337n
3		—	—	—	9.04994	—	7.83214
1	5	—	—	9.04359n	—	8.14465	—
2		—	8.70111n	8.70111	—	7.40634	—
3		—	8.95644	—	—	8.20422n	—

95.

Es sind nun die Endgleichungen zu bilden und aufzulösen, deren allgemeine Ausdrücke man in den Artt. 36 und 46 findet. Die Coefficienten dieser die a. a. O. mit $(\eta\eta)$, $(\eta\varkappa)$, etc. bezeichnet wurden, sollen von nun an, den übrigen Bezeichnungen analog, mit (I,I), (I,II), etc., und die Unbekannten derselben, die oben $\alpha_{,}$, $\beta_{,}$, etc. genannt wurden, mit (I), (II), etc. bezeichnet werden. Die eben angezogenen Ausdrücke bieten zwei verschiedene Arten dar, um die Coefficienten der Endgleichungen zu berechnen, die, wenn sie beide angewandt werden, nicht nur diese Coefficienten selbst, sondern auch die vorhergehenden Rechnungen, mit Ausnahme der q, vollständig controliren. Jede dieser beiden Arten zerfällt überdiess in zwei Nebenarten. Durch die Ausdrücke des Art. bekommt man

$$
\begin{array}{lll}
(I,I) & = & \Sigma'\{Q(1,I)_s\,.\,\eta(1,I)_s + Q(2,I)_s\,.\,\eta(2,I)_s + Q(3,I)_s\,.\,\eta(3,I)_s + \ldots\} \\
(I,II) & = & \Sigma'\{Q(1,II)_s\,.\,\eta(1,I)_s + Q(2,II)_s\,.\,\eta(2,I)_s + Q(3,II)_s\,.\,\eta(3,I)_s + \ldots\} \\
(I,III) & = & \Sigma'\{Q(1,III)_s\,.\,\eta(1,I)_s + Q(2,III)_s\,.\,\eta(2,I)_s + Q(3,III)_s\,.\,\eta(3,I)_s + \ldots\} \\
 & & \quad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad \text{etc.} \\
(II,II) & = & \Sigma'\{Q(1,II)_s\,.\,\eta(1,II)_s + Q(2,II)_s\,.\,\eta(2,II)_s + Q(3,II)_s\,.\,\eta(3,II)_s + \ldots\} \\
(II,III) & = & \Sigma'\{Q(1,III)_s\,.\,\eta(1,II)_s + Q(2,III)_s\,.\,\eta(2,II)_s + Q(3,III)_s\,.\,\eta(3,II)_s + \ldots\} \\
 & & \quad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad \text{etc.} \\
(III,III) & = & \Sigma'\{Q(I,III)_s\,.\,\eta(1,III)_s + Q(2,III)_s\,.\,\eta(2,III)_s + Q(3,III)_s\,.\,\eta(3,III)_s + \ldots\} \\
 & & \quad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad \text{etc.} \\
 & & \quad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{array}
$$

Die erwähnte Nebenart ergiebt sich daraus, dass man in diesen Ausdrücken die Q und η mit einander verwechseln darf.

Die zweite Berechnungsart, die sich aus den Ausdrücken des Art. 35 ergiebt, führt auf die folgenden,

$$
\begin{array}{lll}
(I,I) & = & \Sigma'\{f(1,I)_s\,.\,q(1,I)_s + f(2,I)_s\,.\,q(2,I)_s + f(3,I)_s\,.\,q(3,I)_s + \ldots\} \\
(I,II) & = & \Sigma'\{f(1,I)_s\,.\,q(1,II)_s + f(2,I)_s\,.\,q(2,II)_s + f(3,I)_s\,.\,q(3,II)_s + \ldots\} \\
(I,III) & = & \Sigma'\{f(1,I)_s\,.\,q(1,III)_s + f(2,I)_s\,.\,q(2,III)_s + f(3,I)_s\,.\,q(3,III)_s + \ldots\} \\
 & & \quad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad \text{etc.} \\
(II,II) & = & \Sigma'\{f(1,II)_s\,.\,q(1,II)_s + f(2,II)_s\,.\,q(2,II)_s + f(3,II)_s\,.\,q(3,II)_s + \ldots\} \\
(II,III) & = & \Sigma'\{f(1,II)_s\,.\,q(1,III)_s + f(2,II)_s\,.\,q(2,III)_s + f(3,II)_s\,.\,q(3,III)_s + \ldots\} \\
 & & \quad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad \text{etc.} \\
(III,III) & = & \Sigma'\{f(1,III)_s\,.\,q(1,III)_s + f(2,III)_s\,.\,q(2,III)_s + f(3,III)_s\,.\,q(3,III)_s + \ldots\} \\
 & & \quad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad \text{etc.} \\
 & & \quad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{array}
$$

Auch hier dürfen die f und q mit einander verwechselt werden. Wie man sieht werden diese Coefficienten auch stationsweise berechnet, nur werden die Resultate die jede Station für jeden Coefficienten giebt, schliesslich zu einander addirt, wie das Summenzeichen Σ anzeigt. Die Endgleichungen selbst nehmen nun die folgende Form an.

$$\begin{array}{l}
(I,I)(I) + (I,II)(II) + (I,III)(III) + \dots = F(I) \\
(I,II)(I) + (II,II)(II) + (II,III)(III) + \dots = F(II) \\
(I,III)(I) + (II,III)(II) + (III,III)(III) + \dots = F(III) \\
\text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{array}$$

bis alle Bedingungsgleichungen erschöpft sind. Für unser Beispiel ergaben sich die folgenden Werthe dieser Coefficienten,

i	(i,I)	(i,II)	(i,III)	(i,IV)	(i,V)	(i,VI)
I	0.41983	−0.10422	−0.05229	−0.09915	−0.14097	−0.19782
II		0.36661	−0.12072	+0.00229	+0.12313	+0.06601
III			0.46820	−0.12927	+0.02411	+0.17105
IV				0.36981	−0.08036	−0.06841
V					1.44452	+0.71132
VI						0.478084

Die Auflösung der Endgleichungen geschieht durch die Ausdrücke, die in den Artt. 46 und 49 aufgestellt worden sind, nur ist in Bezug auf die Bezeichnung zu bemerken, dass man

$$\begin{array}{llll}
(II,II,1)\,, & (II,III,1)\,, \text{ etc. } & (III,III,2)\,, & \text{etc. etc. statt} \\
(\varkappa\varkappa,1)\,, & (\varkappa\lambda,1)\,, \text{ etc. } & (\lambda\lambda,2)\,, & \text{etc. etc.}
\end{array}$$

ferner

$$F(II,1),\ F(III,2), \text{ etc. statt } G',\ H'', \text{ etc.}$$

so wie

$$\begin{array}{llllll}
(2)_1\,, & (3)_1\,, & (4)_1\,, \text{ etc. } & (3)_2\,, & (4)_2\,, & \text{etc. etc. statt} \\
\mathfrak{a}'\,, & \mathfrak{b}'\,, & \mathfrak{c}'\,, \text{ etc. } & \mathfrak{b}''\,, & \mathfrak{c}''\,, & \text{etc. etc.}
\end{array}$$

schreiben muss, da man diese Bezeichnung unbeschränkt fortsetzen kann, während die Anwendung von Buchstaben durch die Ausdehnung des Alphabets beschränkt ist.

Für unser Beispiel ergaben sich die folgenden Werthe, die auch weiter unten bei der Berechnung der Gewichte Anwendung finden.

$(2)_1 = +(9.39488)$, $(3)_1 = +(9.09535)$, $(4)_1 = +(9.37322)$, $(5)_1 = +(9.52606)$
$(3)_2 = +(9.59371)$, $(4)_2 = +(8.81627)$, $(5)_2 = -(9.41270)$
$(4)_3 = +(9.56522)$, $(5)_3 = -(9.00219)$
$(5)_4 = +(9.50551)$

$$(6)_1 = +(9.67320)$$
$$(6)_2 = -(8.69547)$$
$$(6)_3 = -(9.57284)$$
$$(6)_4 = +(9.29988)$$
$$(6)_5 = -(9.65565),\quad R_6 = 42.604$$

$$(I,I) = (9.62307),\qquad (IV,IV,3) = (9.46190)$$
$$(II,II,1) = (9.53242),\qquad (V,V,4) = (0.12728)$$
$$(III,III,2) = (9.61197),\qquad (VI,VI,5) = (8.61013)$$

und die Unbekannten

$$(I) = +(0.41932)$$
$$(II) = +(0.81322)$$
$$(III) = +(0.81482)$$
$$(IV) = -(0.75236)$$
$$(V) = +(0.23697)$$
$$(VI) = -(0.88997)$$

Da die vollständige Summe der mit ihren Gewichten multiplicirten Fehlerquadrate

$$W = W_0 + Rq$$

zum Ausdruck hat, wenn hier q die Anzahl der Bedingungsgleichungen bezeichnet, so ergiebt sich

$$W = 212{,}636$$

indem der Werth von W_0 schon im Art. 89 gegeben ist.

96.

Nennen wir nun den wahrscheinlichsten Werth einer Richtung $x(r)_s$, und setzen dem Vorhergehenden analog

$$x(r)_s = y(r)_s - z(r)_s$$

so erhält man die Werthe der $z(r)_s$ durch den folgenden allgemeinen Ausdruck

$$z(r)_s = f(r,I)_s \,.\, (I) + f(r,II)_s \,.\, (II) + f(r,III)_s \,.\, (III) + \ldots.$$

die den letzten des Art. 49 entspricht. Die Substitution der für unser Beispiel im Vorhergehenden erhaltenen numerischen Werthe giebt

$$
\begin{array}{llll}
z(1)_1 = +0''107\,, & z(1)_2 = -0''165\,, & z(1)_3 = -0''348 \\
z(2)_1 = +0.073\,, & z(2)_2 = -0.751\,, & z(2)_3 = +0.140 \\
z(3)_1 = -0.440\,, & z(3)_2 = +0.325\,, & z(3)_3 = +0.198 \\
z(4)_1 = +0.459\,, & z(4)_2 = +0.239 & \\
z(a)_1 = -0.038 & & \\
z(b)_1 = -0.068 & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
z(1)_4 = -0''534\,, & z(1)_5 = -0''698 \\
z(2)_4 = +0.798\,, & z(2)_5 = +0.006 \\
z(3)_4 = -0.687\,, & z(3)_5 = +0.561
\end{array}
$$

und durch Zuziehung der im Art. 89 gegebenen Werthe der $y(r)_s$,

$$
\begin{array}{ll}
x(1)_1 = 63^0\,40'\;\;9''165\,, & x(1)_2 = 27^0\,55'\;\;6''952 \\
x(2)_1 = 96\;\;29\;\;52.748\,, & x(2)_2 = 45\;\;16\;\;35.840 \\
x(3)_1 = 308\;\;51\;\;37.195\,, & x(3)_2 = 64\;\;53\;\;36.762 \\
x(4)_1 = 215\;\;58\;\;15.679\,, & x(4)_2 = 342\;\;17\;\;11.377 \\
x(a)_1 = 106\;\;\;5\;\;28.927 & \\
x(b)_1 = 219\;\;57\;\;22.038 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
x(1)_3 = 179^0\,43'\;\;9''519\,, & x(1)_4 = 88^0\,37'\,44''864 \\
x(2)_3 = 243\;\;45\;\;34.711\,, & x(2)_4 = 128\;\;57\;\;58.367 \\
x(3)_3 = 268\;\;36\;\;49.871\,, & x(3)_4 = 170\;\;26\;\;41.696
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
x(1)_5 = 252^0\,59'\,38''242 \\
x(2)_5 = 276\;\;32\;\;46.010 \\
x(3)_5 = 359\;\;40\;\;37.764
\end{array}
$$

97.

Die Ermittelung der Gewichte einer Anzahl der Winkel und Seiten eines Dreiecksnetzes ist von grosser Wichtigkeit, weil sich durch die numerische Grösse dieser mit Sicherheit auf zweckmässige Anlage des Netzes schliessen lässt. Es soll daher die Anwendung der, auf die im Vorhergehenden allgemein mit Ω bezeichneten Function, bezüglichen Ausdrücke durch eine Anzahl von Beispielen erläutert werden.

Zuerst soll der Winkel (3)(1)(5) der Figur des Art. 91 nebst dem Gewicht dieser Bestimmung berechnet werden. Da

$$(3)(1)(5) = x(2)_1 - x(1)_1$$

ist, und man den wahrscheinlichsten Werth irgend einer Function bekommt, wenn man die wahrscheinlichsten Werthe der Elemente, aus welchen sie besteht, darin substituirt; so bekommt man in diesem Falle sogleich den wahrscheinlichsten Werth dieses Winkels

$$(3)(1)(5) = 32^0\ 49'\ 43''583$$

Zur Berechnung des Gewichts dieser Bestimmung wird mit Weglassung des constanten Gliedes, worauf es hier nicht ankommt, die allgemeine Function

$$\Omega = \delta x(2)_1 - \delta x(1)_1$$

wenn das den Grössen vorgesetzte δ beliebige Aenderungen derselben bezeichnet. Wenn nun die im Art. 31 u. f. mit k, k', etc. bezeichneten Coefficienten des Ausdrucks von Ω mit den Richtungs- und den Stationsnummern, statt der Striche versehen werden, so ergeben sich

$$k(1)_1 = -1\ , \quad k(2)_1 = +1$$

und alle übrigen k sind Null. Zufolge der Gleichungen (46) werden ferner, wenn man die M auf ähnliche Art bezeichnet,

$$\begin{aligned}
(M,1)_1 &= k(1)_1 = -1 \\
(M,2)_1 &= k(2)_1 = +1 \\
(M,3)_1 &= \quad 0 \\
(M,4)_1 &= \quad 0 \\
(M,a)_1 &= \beta''_1 k(2) = -(9.40550) \\
(M,b)_1 &= \beta'_1 k(2) = -(9.31217)
\end{aligned}$$

Setzt man hierauf zur Abkürzung

$$Q(M,1)_1 = \frac{(M,1)_1}{(1,1)_1}, \quad Q(M,2)_1 = \frac{(M,2)_1}{(2,2,1)_1}, \text{ etc.}$$

so giebt die Gleichung (47), wenn wir sie für unser Beispiel vollständig ausschreiben,

$$\begin{aligned}
R = Q(M,1)_1 \,.\, (M,1)_1 &+ Q(M,2)_1 \,.\, (M,2)_1 \\
&+ Q(M,a)_1 \,.\, (M,a)_1 + Q(M,b)_1 \,.\, (M,b)_1
\end{aligned}$$

Durch Hülfe der vorstehenden Werthe und der aus dem Art. 89 zu entnehmenden Werthe der Divisoren $(1,1)_1$, $(2,2,1)_1$, etc. fand sich

$$R = 0.13625$$

Die Ausdrücke (48) werden nun für unser Beispiel, wenn wir wieder die Bezeichnungen den im Vorhergehenden eingeführten analog einrichten, und wieder die Glieder weglassen, die im gegenwärtigen Falle Null sind,

$$(I,M) = Q(M,1)_1 \,.\, \eta(1,I)_1 + Q(M,a)_1 \,.\, \eta(a,I)_1 + Q(M,b)_1 \,.\, \eta(b,I)_1$$
$$(II,M) = Q(M,1)_1 \,.\, \eta(1,II)_1 + Q(M,2)_1 \,.\, \eta(2,II)_1 + Q(M,a)_1 \,.\, \eta(a,II)_1 + Q(M,b)_1 \,.\, \eta(b,II)_1$$
$$(III,M) = Q(M,2)_1 \,.\, \eta(2,III)_1 + Q(M,a)_1 \,.\, \eta(a,III)_1 + Q(M,b)_1 \,.\, \eta(b,III)_1$$
$$(IV,M) = Q(M,a)_1 \,.\, \eta(a,IV)_1 + Q(M,b)_1 \,.\, \eta(b,IV)_1$$
$$(V,M) = Q(M,1)_1 \,.\, \eta(1,V)_1 + Q(M,2)_1 \,.\, \eta(2,V)_1 + Q(M,a)_1 \,.\, \eta(a,V)_1 + Q(M,b)_1 \,.\, \eta(b,V)_1$$
$$(VI,M) = Q(M,1)_1 \,.\, \eta(1,VI)_1 + Q(M,a)_1 \,.\, \eta(a,VI)_1 + Q(M,b)_1 \,.\, \eta(b,VI)_1$$

Die Ausdrücke (49) werden in die hier eingeführte Bezeichnung übersetzt,

$$\begin{aligned}
(II,M,1) &= (II,M) + (I,M)(2)_1 \\
(III,M,1) &= (III,M) + (I,M)(3)_1 \\
(IV,M,1) &= (IV,M) + (I,M)(4)_1 \\
&\text{etc.} \qquad \text{etc.} \\
\hline
(III,M,2) &= (III,M,1) + (II,M,1)(3)_2 \\
(IV,M,2) &= (IV,M,1) + (II,M,1)(4)_2 \\
&\text{etc.} \qquad \text{etc.} \\
\hline
(IV,M,3) &= (IV,M,2) + (III,M,2)(4)_3 \\
&\text{etc.} \\
\hline
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Der Ausdruck (50) wird hierauf

$$S = \frac{(I,M)^2}{(I,I)} + \frac{(II,M,1)^2}{(II,II,1)} + \frac{(III,M,2)^2}{(III,III,2)} + \frac{(IV,M,3)^2}{(IV,IV,3)} + \frac{(V,M,4)^2}{(V,V,4)} + \frac{(VI,M,5)^2}{(VI,VI,5)}$$

und das gesuchte Gewicht

$$P = \frac{1}{R-S}$$

Die Werthe der Coefficienten $(2)_1$, $(3)_1$, etc. etc., so wie die der Divisoren sind aus dem Art. 95 zu entnehmen. Die Rechnung gab

$$\begin{aligned}
(I,M) &= -0.06807 \\
(II,M) &= +0.13625\,, & (II,M,1) &= +0.11935 \\
(III,M) &= -0.07048\,, & (III,M,2) &= -0.03216 \\
(IV,M) &= +0.00230\,, & (IV,M,3) &= -0.01778 \\
(V,M) &= +0.11168\,, & (V,M,4) &= +0.08552 \\
(VI,M) &= +0.06601\,, & (VI,M,5) &= -0.00222
\end{aligned}$$

$$S = 0.06197$$

und aus diesen Werthen von R und S folgt

$$P = 13.46$$

welches das gesuchte Gewicht ist.

98.

Als zweites Beispiel soll der Winkel $(b)(1)(a)$ der Figur nebst dessen Gewicht berechnet werden. Der wahrscheinlichste Werth desselben wird sogleich nach Art. 96

$$(b)(1)(a) = 163^0\ 51'\ 53''111$$

und für das Gewicht wird zunächst

$$\Omega = \delta x(b) - \delta x(a)$$

folglich

$$k(a) = -1\ ,\quad k(b) = +1$$

$$(M,a)_1 = k(a) \qquad = -1$$
$$(M,b)_1 = \varepsilon_1{}^{V} k(a) + k(b) = +(9.7022)$$
$$R = 0.04723$$

$$\begin{array}{lll} (I,M) = -0.00693 & & \\ (II,M) = +0.001485\ , & (II,M,1) = -0.000235 \\ (III,M) = +0.00705\ , & (III,M,2) = +0.006095 \\ (IV,M) = +0.001105\ , & (IV,M,3) = +0.001692 \\ (V,M) = +0.007817\ , & (V,M,4) = +0.005481 \\ (VI,M) = +0.008728\ , & (VI,M,5) = +0.001053 \end{array}$$

$$S = 0.00026$$
$$P = 21.29$$

99.

Als drittes Beispiel soll der Werth und das Gewicht des Winkels (5)(2)(3) berechnet werden. Jenen bekommt man sogleich

$$(5)(2)(3) = x(3)_2 - x(2)_2 = 19^0\ 37'\ 0''922$$

und da hier

$$k(2)_2 = -1\ ,\quad k(3)_2 = +1$$

sind, so werden

$$(M,2)_2 = k(2)_2 = -1$$
$$(M,3)_2 = k(3)_2 = +1$$
$$(M,4)_2 = \beta'''_2 . k(2)_2 + \gamma'''_2 . k(3)_2 = +(9.6697)$$
$$R = 0.2255$$

$$(I,M) = 0$$
$$(II,M) = 0 \qquad (II,M,1) = 0$$
$$(III,M) = +0.06536\,, \qquad (III,M,2) = +0.06536$$
$$(IV,M) = -0.01841\,, \qquad (IV,M,3) = +0.00561$$
$$(V,M) = -0.4821\,, \qquad (V,M,4) = -0.4869$$
$$(VI,M) = -0.1774\,, \qquad (VI,M,5) = +0.0197$$
$$S = 0.1968$$
$$P = 34.8$$

100.

Als viertes Beispiel soll der Werth und das Gewicht des Winkels (5)(3)(2), welcher zu den nicht beobachteten gehört, berechnet werden. Dieser wird aus den beiden andern Winkeln des Dreiecks, dem er angehört, durch den folgenden Ausdruck gefunden

$$(5)(3)(2) = 180^0\ 0'\ 0''737 - x(3)_2 + x(2)_2 - x(3)_5 + x(1)_5$$

indem der sphärische Exces dieses Dreiecks $= 0''737$ ist. Die Angaben des Art. 96 geben

$$(5)(3)(2) = 53^0\ 41'\ 0''293$$

welches der wahrscheinlichste Werth dieses Winkels ist. Es wird nun

$$\Omega = \delta x(2)_2 - \delta x(3)_2 + \delta x(1)_5 - \delta x(3)_5$$

also

$$k(2)_2 = +1\,, \quad k(3)_2 = -1\,, \quad k(1)_5 = +1\,, \quad k(3)_5 = -1$$
$$(M,2)_2 = k(2)_2 = +1$$
$$(M,3)_2 = k(3)_2 = -1$$
$$(M,4)_2 = \beta'''_2 . k(2)_2 + \gamma'''_2 . k(3)_2 = -(9.66965)$$
$$(M,1)_5 = k(1)_5 = +1$$
$$(M,3)_5 = k(3)_5 = -1$$
$$R = 0.42647$$

ferner

$$(I,M) = 0$$

$$(II,M) = -0.090456 \,, \quad (II,M,1) = -0.090456$$

$$(III,M) = -0.17595 \,, \quad (III,M,2) = -0.21144$$

$$(IV,M) = +0.018405 \,, \quad (IV,M,3) = -0.65216$$

$$(V,M) = +0.51198 \,, \quad (V,M,4) = +0.53574$$

$$(VI,M) = +0.17736 \,, \quad (VI,M,5) = +0.00323$$

$$S = 0.36228$$

$$P = 15.58$$

Das Gewicht des beobachteten Winkels (3)(1)(5) wurde oben im Art. 97 = 13.44 gefunden, man sieht also hieraus, dass unter Umständen das Gewicht eines berechneten Winkels grösser werden kann wie das eines beobachteten.

101.

Da die Richtungen an sich unbestimmte Grössen sind, so kann eine Bestimmung der Gewichte derselben auch nicht stattfinden, die Formeln werden Zahlen geben, die als Gewichte plus einer unbestimmten Grösse gelten müssen, und ebenso verhält es sich mit den Anfangspunkten der Gyri, oder der Gruppen derselben. Aber die Aggregate $u(m)_s + x(r)_s$ sind bestimmte Grössen, und die Gewichte dieser lassen sich daher bestimmen. Es soll daher als erstes Beispiel dieser Gattung zunächst das Gewicht des Aggregats $u(1)_3 + x(1)_3$ berechnet werden. Da wir hier $x(1)_3$ statt $w(1)_3$ schreiben können, so geben die Gleichungen (65)

$$u(1)_3 + x(1)_3 = \tfrac{1}{2}x(1)_3 - \tfrac{1}{2}x(2)_3$$

und es wird daher die Function

$$\Omega = \tfrac{1}{2}\delta x(1)_3 - \tfrac{1}{2}\delta x(2)_3$$

folglich

$$k(1)_3 = +\tfrac{1}{2} \,, \quad k(2)_3 = -\tfrac{1}{2}$$

Hiemit ergeben sich

$$(M,1)_3 = \tfrac{1}{2}$$

$$(M,2)_3 = -\tfrac{1}{2}$$

$$(M,3)_3 = 0$$

woraus

$$R = 0.02242$$

hervorgeht. Ferner

$$
\begin{array}{llll}
(I,M) = +0.01808 & & & \\
(II,M) = -0.04484\,, & (II,M,1) & = & -0.04035 \\
(III,M) = 0 & (III,M,2) & = & -0.01358 \\
(IV,M) = 0 & (IV,M,3) & = & -0.00336 \\
(V,M) = 0 & (V,M,4) & = & +0.01680 \\
(VI,M) = 0 & (VI,M,5) & = & +0.00733
\end{array}
$$

$$S = 0.00758$$
$$P = 67.37$$

102.

Als zweites Beispiel soll das Gewicht des Aggregats $u(8)_2 + x(4)_2$ berechnet werden. Da hier

$$u(8)_2 = -\tfrac{1}{4}(x(1)_2 + x(2)_2 + x(3)_2 + x(4)_2)$$

ist, so wird

$$\Omega = -\tfrac{1}{4}\delta x(1)_2 - \tfrac{1}{4}\delta x(2)_2 - \tfrac{1}{4}\delta x(3)_2 + \tfrac{3}{4}\delta x(4)_2$$

also

$$k(1)_2 = -\tfrac{1}{4}\,,\quad k(2)_2 = -\tfrac{1}{4}\,,\quad k(3)_2 = -\tfrac{1}{4}\,,\quad k(4)_2 = +\tfrac{3}{4}$$

$$
\begin{aligned}
(M,1)_2 &= -\tfrac{1}{4} \\
(M,2)_2 &= -\tfrac{1}{4} \\
(M,3)_2 &= -\tfrac{1}{4} \\
(M,4)_2 &= +0.7668 \\
R &= 0.03926
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{llll}
(I,M) = 0 & & & \\
(II,M) = 0 & (II,M,1) & = & 0 \\
(III,M) = +0.00082\,, & (III,M,2) & = & +0.00082 \\
(IV,M) = -0.04040\,, & (IV,M,3) & = & -0.04010 \\
(V,M) = -0.09367\,, & (V,M,4) & = & -0.10645 \\
(VI,M) = -0.03285\,, & (VI,M,5) & = & +0.00702
\end{array}
$$

$$S = 0.01521$$
$$P = 41.58$$

103.

Als letztes Beispiel soll die Dreiecksseite Warte - Wachsenburg aus der als gegeben betrachteten Seite Seeberg - Inselsberg, nebst

dem Gewicht dieser Bestimmung berechnet werden, wobei in Metern ausgedrückt

$$\log (1)(3) = 4.3136765$$

angenommen werden soll. Aus der Figur des Art. 91 findet man leicht auf dem einfachsten Wege

$$(2)(4) = \frac{\sin [x(3)_1 - x(4)_1 - 0''140] \sin [x(3)_3 - x(2)_3 - 0''211]}{\sin [x(1)_2 - x(4)_2 - 0''140] \sin [x(2)_4 - x(1)_4 - 0''211]} (1)(3)$$

Die Zahlen 0″140 und 0″211 sind der dritte Theil der sphärischen Ueberschüsse der beiden in Betracht kommenden Dreiecke. Man hätte hier, gleichwie oben in den beiden letzten Bedingungsgleichungen geschehen ist, diesen weglassen können, wenn man statt der Seiten selbst ihre Sinusse angesetzt hätte, ich finde aber hier die Anwendung der Seiten selbst für einfacher. Die Substitution der obigen wahrscheinlichsten Werthe der Richtungen giebt nun zuerst

$$\log (2)(4) = 4.2713762.5$$

$$\text{Warte-Wachsenburg} = 18679^m972$$

Die Function Ω ist hier nicht unmittelbar gegeben, sondern wird durch die Differentiation des vorstehenden Ausdrucks für (2)(4) in Bezug auf die darin vorkommenden Richtungen erhalten. Zu dem Ende braucht man nur den numerischen Werth der rechten Seite derselben mit den Cotangenten der darin vorkommenden Winkel zu multipliciren, und um die Aenderungen in Bezug auf die Secunde zu erhalten, diese Produkte mit 206265″ zu dividiren; für die im Nenner vorkommenden Winkel müssen überdies die Zeichen umgekehrt werden. Auf diese Art ergab sich mit Weglassung des constanten Gliedes

$$\Omega = -0^m004571 \delta[x(3)_1 - x(4)_1] + 0^m19551 \delta[x(3)_3 - x(2)_3]$$
$$-0.08559\ \delta[x(1)_2 - x(4)_2] - 0.10665 \delta[x(2)_4 - x(1)_4]$$

Dieser Ausdruck giebt

$$k(3)_1 = -0.004571 \qquad k(2)_3 = -0.19551$$
$$k(4)_1 = +0.004571 \qquad k(3)_3 = +0.19551$$
$$k(1)_2 = -0.08859 \qquad k(1)_4 = +0.10665$$
$$k(4)_2 = +0.08859 \qquad k(2)_4 = -0.10665$$

Es werden ferner

$$(M,3)_1 = k(3)_1 = -0.004571$$
$$(M,4)_1 = \gamma'''_1 \,.\, k(3)_1 + k(4)_1 = +0.004119$$
$$(M,a)_1 = \gamma^{IV}_1 \,.\, k(3)_1 + \delta''_1 \,.\, k(4) = +0.000605$$
$$(M,b)_1 = \gamma^{V}_1 \,.\, k(3)_1 + \delta^{V}_1 \,.\, k(4) = +0.000441$$

$$(M,1)_2 = k(1)_2 = -0.08859$$
$$(M,4)_2 = k(4)_2 = +0.08859$$
$$(M,2)_3 = k(2)_3 = -0.19551$$
$$(M,3)_3 = k(3)_3 = +0.19551$$
$$(M,1)_4 = k(1)_4 = +0.10665$$
$$(M,2)_4 = k(2)_4 = -0.10665$$

und hiemit

$$R = 0.0066477$$

Ferner

$$\begin{array}{llll} (I,M) = +0.005420 & & \\ (II,M) = -0.007079 & (II,M,1) = -0.005733 \\ (III,M) = +0.004679 & (III,M,2) = +0.003104 \\ (IV,M) = -0.000596 & (IV,M,3) = +0.001449 \\ (V,M) = +0.001966 & (V,M,4) = +0.005421 \\ (VI,M) = +0.012427 & (VI,M,5) = +0.011940 \end{array}$$

$$S = 0.0037176$$

und das gesuchte Gewicht

$$P = 341.2$$

104.

Wenn in einem Dreiecksnetze mehr Winkel beobachtet worden sind, als hinreichend und nothwendig um nebst Einer Seite dieses Netz vollständig berechnen zu können, so können die verschiedenen Stücke desselben auf mehr wie Eine Art berechnet werden. Wenn aber die Winkel dem hier entwickelten Verfahren gemäss ausgeglichen worden sind, so muss jede mögliche Berechnungsart irgend eines Stückes dieses Dreiecksnetzes nicht nur auf den nemlichen Werth desselben hinführen, sondern auch das Gewicht der Bestimmung desselben muss bei jeder Berechnungsart denselben Werth bekommen. Um zu zeigen, dass dieses in der That der Fall ist, werde ich das erste und das letzte der vorhergehenden Beispiele auf andere Weise berechnen wie im Vorhergehenden geschehen ist.

Man findet leicht, dass man dem Ausdruck des Winkels (3)(1)(5) auch die folgende Form geben kann,

$$(3)(1)(5) = 180^0\ 0'\ 0''528 + x(1)_3 - x(2)_3 + x(2)_5 - x(3)_5$$

und es ist an sich klar, dass hieraus derselbe wahrscheinlichste Werth dieses Winkels hervorgehen muss wie oben. Wir brauchen uns daher nur mit der Berechnung des Gewichts dieser Bestimmung zu beschäftigen. Es werden hier

$$(M,1)_3 = k(1)_3 = +1$$
$$(M,2)_3 = k(2)_3 = -1$$
$$(M,2)_5 = k(2)_5 = +1$$
$$(M,3)_5 = k(3)_5 = -1$$

und hieraus findet sich zuerst

$$R = 0.23035$$

Ferner werden

$$\begin{array}{llll} (I,M) = +0.03615 & & & \\ (II,M) = 0 & & (II,M,1) = +0.00854 & \\ (III,M) = +0.05025 & & (III,M,2) = +0.05824 & \\ (IV,M) = -0.23035 & & (IV,M,3) = -0.20023 & \\ (V,M) = +0.9275 & & (V,M,4) = +4.274 & \\ (VI,M) = 0 & & (VI,M,5) = -0.112 & \end{array}$$

$$S = 0.15613$$
$$P = 13.47$$

mit dem im Art. 97 erhaltenen Werthe übereinstimmend.

105.

Die Dreiecke unserer Figur geben die folgenden Gleichungen

$$x(3)_3 - x(2)_3 = 180^0\ 0'\ 0''634 - x(1)_1 + x(3)_1 - x(2)_4 + x(1)_4$$
$$x(1)_2 - x(4)_2 = 180^0\ 0'\ 0''420 + x(4)_1 - x(3)_1 - x(3)_4 + x(2)_4$$

und es ist klar, dass nach der Substitution dieser Ausdrücke in den Ausdruck für die Seite (2)(4) des Art. 103 genau derselbe Werth dieser Dreiecksseite wieder hervor gehen muss. Substituirt man aber diese Ausdrücke in den Ausdruck für Ω desselben Art., so bekommt man

$$\begin{aligned} \Omega = & -0^m00457\delta[x(3)_1 - x(4)_1] \\ & -0.19551\delta[x(1)_1 - x(3)_1 - x(1)_4 + x(2)_4] \\ & +0.08859\delta[x(3)_1 - x(4)_1 - x(2)_4 + x(3)_4] \\ & +0.10665\delta[x(1)_4 - x(2)_4] \end{aligned}$$

und es werden jetzt

$$k(1)_1 = -0.19551 \qquad k(1)_4 = +0.30216$$
$$k(3)_1 = +0.27953 \qquad k(2)_4 = -0.39075$$
$$k(4)_1 = -0.08402 \qquad k(3)_4 = +0.08859$$

Hieraus ergaben sich

$$\begin{aligned}
(M,1)_1 &= k(1)_1 &&= -0.19551\\
(M,3)_1 &= k(3)_1 &&= +0.27953\\
(M,4)_1 &= \gamma'''_1 \,.\, k(3)_1 + k(4)_1 &&= -0.05880\\
(M,a)_1 &= \gamma^{IV}_1 \,.\, k(3)_1 + \delta^{IV}_1 \,.\, k(4)_1 &&= +0.05446\\
(M,b)_1 &= \gamma^{V}_1 \,.\, k(3)_1 + \delta^{V}_1 \,.\, k(4)_1 &&= +0.11661\\
(M,1)_4 &= k(1)_4 &&= +0.30216\\
(M,2)_4 &= k(2)_4 &&= -0.39075\\
(M,3)_4 &= k(3)_4 &&= +0.08859
\end{aligned}$$

$$R = 0.026806$$

ferner

$$\begin{aligned}
(I,M) &= -0.085444 & &\\
(II,M) &= +0.013500 & (II,M,1) &= -0.007711\\
(III,M) &= +0.003455 & (III,M,2) &= -0.010213\\
(IV,M) &= +0.051544 & (IV,M,3) &= +0.027108\\
(V,M) &= +0.022413 & (V,M,4) &= +0.005424\\
(VI,M) &= +0.045048 & (VI,M,5) &= +0.011941
\end{aligned}$$

$$S = 0.023877$$
$$P = 341.3$$

mit dem Art. 103 bis auf 0.1 übereinstimmend.

106.

Ein ganz anderer Ausdruck für dieselbe Dreiecksseite ist der folgende,

$$(2)(4) = \frac{\sin\,[x(2)_2 - x(4)_2 + x(3)_4 - x(1)_4 - 0''904]\,\sin\,[x(4)_1 - x(1)_1 - 0''100]}{\sin\,[x(3)_4 - x(1)_4 - 0''452]\,\sin\,[x(2)_2 - x(1)_2 - 0''100]}\,(1)(3)$$

der auch aus der Figur leicht zu erhalten ist. Substituirt man hierin die wahrscheinlichsten Werthe der Richtungen, so bekommt man

$$\log\,(2)(4) = 4.2713762.8$$
$$(2)(4) = 18679^{m}973$$

bis auf Unbedeutendes wie oben. Es wird aber jetzt

$$\Omega = 18679^m973 - 0^m12841\delta[x(2)_2 - x(4)_2 + x(3)_4 - x(1)_4]$$
$$- 0.17251\delta[x(4)_1 - x(1)_1]$$
$$- 0.01303\delta[x(3)_4 - x(1)_4]$$
$$- 0.28973\delta[x(2)_2 - x(1)_2]$$

und folglich

$$k(1)_1 = +0.17251 \qquad k(4)_2 = +0.12841$$
$$k(4)_1 = -0.17251 \qquad k(1)_4 = +0.14144$$
$$k(1)_2 = +0.28973 \qquad k(3)_4 = -0.14144$$
$$k(2)_2 = -0.41814$$

Hieraus bekommt man

$$(M,1)_1 = k(1)_1 = +\,0.17251$$
$$(M,4)_1 = k(4)_1 = -\,0.17251$$
$$(M,a)_1 = \delta''_1\,.\,k(4)_1 = -(8.90693)$$
$$(M,b)_1 = \delta'_1\,.\,k(4)_1 = -(9.10265)$$
$$(M,1)_2 = k(1)_2 = +\,0.28973$$
$$(M,2)_2 = k(2)_2 = -\,0.41814$$
$$(M,4)_2 = \beta'''_2 k(2)_2 + k(4)_2 = +(9.38049)$$
$$(M,1)_4 = k(1)_4 = +\,0.14144$$
$$(M,3)_4 = k(3)_4 = -\,0.14144$$
$$R = 0.042766$$

$$(I,M) = +0.008179$$
$$(II,M) = -0.011346 \qquad (II,M,1) = -0.009316$$
$$(III,M) = -0.032856 \qquad (III,M,2) = -0.035492$$
$$(IV,M) = +0.000005 \qquad (IV,M,3) = -0.011716$$
$$(V,M) = -0.223522 \qquad (V,M,4) = -0.218549$$
$$(VI,M) = -0.117261 \qquad (VI,M,5) = -0.003109$$
$$S = 0.039833$$
$$P = 341.2$$

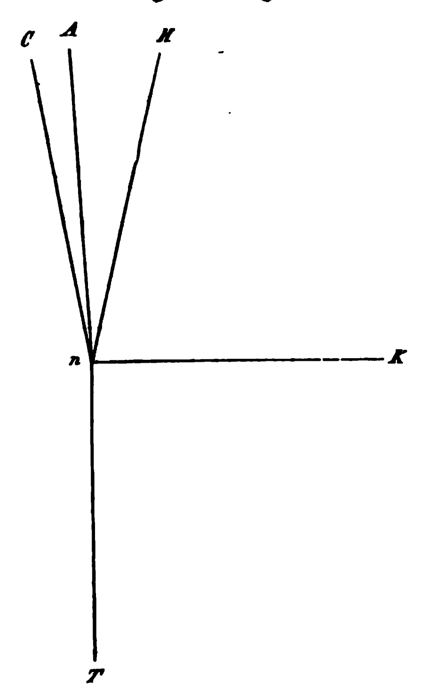
mit den vorhergehenden Bestimmungen dieses Gewichts übereinstimmend. Ich mache darauf aufmerksam, dass in allen diesen Gewichten eine einzelne Beobachtung irgend einer Richtung die Einheit bildet.

107.

Um auch den Inhalt des Art. 81 durch ein Beispiel zu erläutern soll die Maupertuis'sche Gradmessung dienen, die ich bekanntlich kurz

nach dem Erscheinen der Gaussischen, oben mehrmals angezogenen Abhandlung theils nach dem in dieser gegebenen Verfahren, theils nach einem eigenthümlichen, welches mit dem hier im Art. 28 u. f. erklärten identisch ist, berechnet habe. Bei dieser Gradmessung sind im Ganzen 18 Bedingungsgleichungen vorhanden, und ich habe daher, den Gaussischen Vorschriften folgend, ein System von 18 Gleichungen auflösen müssen. Unter diesen Gleichungen befinden sich aber vier locale, und zwar die, welche ich mit *J*, *L*, *M*, *O* bezeichnet habe*), und die dem Art. 81 zufolge von den übrigen getrennt werden können. Wenn ich damals diesen Satz angewandt hätte, so hätte ich ein System von nur 14 Gleichungen aufzulösen, und daher eine weit kürzere Rechnung gehabt.

Es gnügt für den hier zu verfolgenden Zweck blos Eine Station dieser Gradmessung zu behandeln, und hiefür wähle ich diejenige aus, die Rosenberger mit *n* bezeichnet hat**). Die auf dieser Station gemessenen Winkel lassen sich durch die folgende Figur anschaulich machen,



und haben nach der Reduction derselben auf den Horizont die folgenden Werthe,

*) S. Schum. Astr. Nachr. B. IX. p. 215.
**) S. Schum. Astr. Nachr. B. VI. Nr. 121 u. 122.

$$CnH = 31^\circ 57' \ 3''63$$
$$AnH = 21 \ 32 \ 16.30$$
$$AnK = 95 \ 29 \ 54.43$$
$$HnK = 73 \ 58 \ \ 5.64$$
$$KnT = 87 \ 44 \ 19.40$$

Man sieht, dass zwischen diesen Winkeln eine Bedingungsgleichung vorkommt, zufolge welcher

$$AnK = AnH + HnK$$

sein muss, und es ist diese die ich a. a. Orte mit J bezeichnet habe. Ich bezeichne nun die fünf Richtungen nC, nA, nH, nK, nT, bez. mit (1), (2), (3), (4), (5), nehme dafür die vorläufigen Werthe

$$(1) = \ \ 0^\circ \ 0' \ 0''$$
$$(2) = \ 10 \ 24 \ 47.33$$
$$(3) = \ 31 \ 57 \ \ 3.63$$
$$(4) = 105 \ 55 \ \ 9.27$$
$$(5) = 193 \ 39 \ 28.67$$

an, und bilde, indem ich die daraus folgenden Winkel von den beobachteten abziehe, wie oben erklärt worden ist, die folgenden Werthe der l, und zugleich lege ich jeder Richtung das Gewicht $= 1$ bei. Hiemit entsteht die folgende Tafel, die den bez. zweiten Tafeln des vorhergehenden Beispiels ähnlich ist.

Nr.	(2)	(3)	(4)	(5)	(1)	p	P
1		0″00			0″00	1	2
2	0″00	0.00				1	2
3		0.00	0″00			1	2
4			0.00	0″00		1	2
5	+13.755		−13.755			1	2
(lx)	+13″755	0″00	−13″755	0″00	0″00		10
Q	2	3	3	1	1		

Der Richtung (1) ist deshalb der letzte Platz gegeben worden, weil sonst nicht die im Art. 76 bezeichneten Coefficienten hätten Null gemacht werden können. Durch die Ausdrücke des gen. Art. findet sich nun

$$(pp) = 1, \quad (pp') = \tfrac{1}{2}, \quad (pp'') = \tfrac{1}{2}, \quad (pp''') = 0, \quad (pp^{IV}) = 0$$
$$(p'p') = \tfrac{3}{2}, \quad (p'p'') = \tfrac{1}{2}, \quad (p'p''') = 0, \quad (p'p^{IV}) = \tfrac{1}{2}$$
$$(p''p'') = \tfrac{3}{2}, \quad (p''p''') = \tfrac{1}{2}, \quad (p''p^{IV}) = 0$$
$$(p'''p''') = \tfrac{1}{2}, \quad (p'''p^{IV}) = 0$$
$$(p^{IV}p^{IV}) = \tfrac{1}{2}$$

$$N = N' = N'' = \sqrt{\tfrac{1}{2}}, \quad N''' = N^{IV} = 0$$

$$(aa) = 1{,}5, \quad (ab) = 0, \quad (ac) = 0, \quad (ad) = 0, \quad (ae) = 0, \quad (al) = +13''755$$
$$(bb) = 2, \quad (bc) = 0, \quad (bd) = 0, \quad (be) = -0.5, \quad (bl) = 0$$
$$(cc) = 2, \quad (cd) = -0.5, \quad (ce) = 0, \quad (cl) = -13.755$$
$$(dd) = 0.5, \quad (de) = 0, \quad (dl) = 0$$
$$(ee) = 0.5, \quad (el) = 0$$
$$(ll) = 378.4$$

und hiemit

$$(bb,1) = 2, \quad (bl,1) = 0$$
$$(cc,2) = 5, \quad (cl,2) = -13''755$$
$$(dd,3) = 0.375, \quad (dl,3) = -3.438$$
$$(ee,4) = 0.375, \quad (el,4) = 0$$
$$(ll,5) = 126.4$$

$$\log \chi' = 0.9622n, \quad \log \chi''' = 0.8373, \quad \log \chi^{IV} = 0{,}9623$$
$$\log \delta' = 9.3980, \quad \log \gamma''' = 9.3980, \quad \log \beta^{IV} = 9.3980$$

und alle übrigen Grössen dieser Gattung sind Null. Hieraus folgen nun die Verbesserungen

$$w(1) = 0$$
$$w(2) = +9''17$$
$$w(3) = 0$$
$$w(4) = -9.17$$
$$w(5) = -9.17$$

Addirt man diese zu den angenommenen Werthen der Richtungen, so erhält man diese wie folgt

$$y(1) = 0^\circ\ 0'\ 0''$$
$$y(2) = 10\ 24\ 56.50$$
$$y(3) = 31\ 57\ 3.63$$
$$y(4) = 105\ 55\ 0.10$$
$$y(5) = 193\ 39\ 19.50$$

die nebst den obigen Werthen von (aa), $(bb,1)$, $(cc,2)$, etc und β^{IV}, γ''', δ', in dem zweiten Theil der Auflösung anzuwenden sind. Aus den

vorstehenden Werthen der y erkennt man leicht, wie vorher gesehen werden konnte, dass die Winkel $CnH = (3) - (1)$ und $KnT = (5) - (4)$ unverändert geblieben sind, und die Verbesserungen sich zu gleichen Theilen, aber mit verschiedenen Zeichen, auf die übrigen drei Winkel erstrecken. Wenn auf einer Station mehr wie Eine locale Bedingungsgleichung vorhanden ist, dann findet der letzt genannte Umstand nicht mehr statt.

In unserem Beispiel kommen ausserdem noch drei Stationen vor, die auf dieselbe Weise behandelt werden können, so dass, wie oben angeführt, in dem zweiten Theil der Auflösung nur ein System von 14 Gleichungen aufzulösen ist, wodurch die Arbeit wesentlich abgekürzt wird. Es ist noch zu bemerken, dass auf den Stationen, auf welchen keine locale Bedingungsgleichungen vorhanden sind, die Winkel als Unbekannte beibehalten werden können, und nicht in die Richtungen aufgelöst zu werden brauchen, nur muss man, wenn übrigens alle Beobachtungen für gleich gut gehalten werden können, das Gewicht der Winkel $= \frac{1}{2}$ setzen, wenn wie oben das Gewicht der Richtungen $= 1$ angenommen worden ist.

b) Zweites Verfahren.

108.

Das im Vorhergehenden gegebene Verfahren zur Ausgleichung der Winkel eines Dreiecksnetzes ist einer Abänderung fähig, die ich nicht unterlassen will hinzuzufügen.

Wenden wir uns zu den Gleichungen (61) des Art. 69, und entfernen in den Ausdrücken der Coefficienten derselben Alles, was sich auf die Bedingungsgleichung (56) bezieht, mit anderen Worten, setzen wir darin $N = N' = N'' = \text{etc.} = 0$, hierauf werden

$$\begin{aligned}
(aa) &= Q - (pp) \\
(ab) &= - (pp') \\
(ac) &= - (pp'') \\
&\text{etc.} \\
(al) &= (lx) \\
\hline
(bb) &= Q' - (p'p') \\
(bc) &= - (p'p'') \\
&\text{etc.} \\
(bl) &= (lx')
\end{aligned}$$

$$(cc) = Q'' - (p''p'')$$
etc.
$$(cl) = (lx'')$$

---

etc.

---

wo (pp), (pp'), etc. dieselben sind wie vorher. Aber aus dem Art. 71 folgt jetzt

$$\begin{array}{l} (aa) + (ab) + (ac) + \ldots = 0 \\ (ab) + (bb) + (bc) + \ldots = 0 \\ (ac) + (bc) + (cc) + \ldots = 0 \\ \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \end{array}$$

und zufolge des Art. 68 ist

$$(lx) + (lx') + (lx'') + \ldots = 0$$

Die Summe der Gleichungen (61) ist also identisch Null, woraus folgt, dass jede derselben in den übrigen enthalten ist. Die (61) kann man aber auch wie folgt schreiben,

$$\begin{array}{l} \{(aa) + (ab) + (ac) + \ldots\}x + (ab)(x'-x) + (ac)(x''-x) + \ldots = (lx) \\ \{(ab) + (bb) + (bc) + \ldots\}x + (bb)(x'-x) + (bc)(x''-x) + \ldots = (lx') \\ \{(ac) + (bc) + (cc) + \ldots\}x + (bc)(x'-x) + (cc)(x''-x) + \ldots = (lx'') \\ \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \end{array}$$

Zufolge der obigen Bedingungsgleichungen sind hier alle Coefficienten von x gleich Null, x verschwindet daher aus diesen Gleichungen, und bleibt völlig willkührlich, wie auch die Natur der Sache mit sich bringt. Es entsteht hiemit ein System von Gleichungen, welches nur die Unterschiede $x'-x$, $x''-x$, etc. enthält, und von welchen wieder jede in den übrigen enthalten ist. Denn mit Zuziehung der vorstehenden Bedingungsgleichungen erkennt man, dass auch nach der Entfernung der mit x multiplicirten Glieder die Summe der Gleichungen identisch Null ist. Aber jetzt ist die Anzahl der Gleichungen um Eins grösser wie die Anzahl der Unbekannten, und man kann also Eine Gleichung weglassen. Lässt man die erste weg, so bekommt man das System

$$\left.\begin{array}{l} (bb)(x'-x) + (bc)(x''-x) + (bd)(x'''-x) + \ldots = (lx') \\ (bc)(x'-x) + (cc)(x''-x) + (cd)(x'''-x) + \ldots = (lx'') \\ (bd)(x'-x) + (cd)(x''-x) + (dd)(x'''-x) + \ldots = (lx''') \\ \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \end{array}\right\} \quad (67)$$

aus welchem auf dieselbe Art wie vorher die Unbekannten $x'-x$, $x''-x$, $x'''-x$. etc. bestimmt werden können.

109.

Bei der Anwendung der Gleichungen (67) sind auf jeder Station wieder dieselben Täfelchen zu bilden, wie im Art. 84 u. d. f., auch sind die Grössen (pp), (pp'), etc nebst (ll) ganz eben so zu bilden wie vorher, nur die Coefficienten (bb), (bc), etc. sind nach den Ausdrücken des vor. Art. zu berechnen, und man kann statt dieser Bezeichnung sogleich (2,2,1), (2,3,1), (3,3,2), etc. etc. einführen. Es wird dadurch eine Uebereinstimmung mit dem Vorhergehenden zu Wege gebracht. Die Rechnung giebt wieder die Grössen die im Vorhergehenden mit $w(r)_s$ und $y(r)_s$ bezeichnet wurden, wenn man auf jeder Station, in Bezug auf die Richtungen, deren Verbesserung eliminirt worden ist, jene Null macht, oder diese Richtung so lässt wie man sie vorläufig angenommen hat.

Da in den Bedingungsgleichungen, die das Dreiecksnetz liefert nur Unterschiede der Richtungen vorkommen, so sind jetzt in den Differentialen derselben die Coefficienten der eben bezeichneten Richtungen gleich Null zu machen, und die Folge davon ist, dass auch die betreffenden zweiten, mit $z(r)_s$ bezeichneten, Verbesserungen Null werden.

110.

Es scheint mir angemessen das im Vorhergehenden ausgeführte Beispiel auch durch das hier gegebene Verfahren zu behandeln, wobei es aber gnügen wird, die einzelnen Resultate kurz anzugeben.

Resultate der Ausgleichung auf den Stationen.

Station (1).

$y(1)_1 = 63^\circ 14' 10''000$

$w(2)_1 = +\ 1''549$, $y(2)_1 = 96\ 29\ 53.549$

$w(3)_1 = +\ 0.483$, $y(3)_1 = 308\ 51\ 37.483$

$w(4)_1 = -\ 0.134$, $y(4)_1 = 215\ 58\ 16.866$

$w(a)_1 = +\ 0.617$, $y(a)_1 = 106\ \ 5\ 29.617$

$w(b)_1 = -\ 0.302$, $y(b)_1 = 269\ 57\ 22.698$

$(ll,6) = 132.862$

$\beta_1'' = +(9.17609)$

$\beta_1''' = +(8.14082)$, $\gamma_1''' = +(8.96473)$

$\beta_1^{IV} = +(9.51809)$, $\gamma_1^{IV} = +(9.62332)$, $\delta_1^{IV} = +(9.68218)$

$\beta_1^{V} = +(9.66883)$, $\gamma_1^{V} = +(9.92410)$, $\delta_1^{V} = +(9.94563)$, $\varepsilon_1^{V} = +(9.89042)$

$(2,2,1)_1 = 10.0 \qquad (a,a,4)_1 = (1.39590)$

$(3,3,2)_1 = (1.33630)\,, \quad (b,b,5)_1 = (0.84881)$

$(4,4,3)_1 = (1.10206)\,,$

Station (2).

$$y(1)_2 = 27^\circ 55'\ 7''000$$

$$w(2)_2 = +\ 0''302\,, \quad y(2)_2 = 45\ 16\ 35.302$$

$$w(3)_2 = +\ 1.301\,, \quad y(3)_2 = 64\ 53\ 37.301$$

$$w(4)_2 = -\ 0.171\,, \quad y(4)_2 = 342\ 17\ 11.829$$

$$(ll,4) = 14.077$$

$$\beta_2'' = +\ (9.43573)\,, \quad \beta_2''' = +\ (9.57719)\,, \quad \gamma_2''' = +\ (9.78336)$$

$$(2,2,1)_2 = (0.74036)\,, \quad (3,3,2)_2 = (1.12788)\,, \quad (4,4,3)_2 = (1.09584)$$

Station (3).

$$y(1)_3 = 179^\circ 43'\ 9''000$$

$$w(2)_3 = -\ 0''319\,, \quad y(2)_3 = 243\ 45\ 34.681$$

$$w(3)_3 = -\ 0.102\,, \quad y(3)_3 = 268\ 36\ 49.898$$

$$(ll,3) = 2.121$$

$$\beta_3'' = +\ (9.61881)$$

$$(2,2,1)_3 = (1.17124)\,, \quad (3,3,2)_3 = (0.89040)$$

Station (4).

$$y(1)_4 = 88^\circ 37'\ 44''000$$

$$w(2)_4 = -\ 1''165\,, \quad y(2)_4 = 128\ 57\ 58.835$$

$$w(3)_4 = +\ 0.679\,, \quad y(3)_4 = 170\ 26\ 40.679$$

$$(ll,3) = 14.685$$

$$\beta_4'' = (9.64573)$$

$$(2,2,1)_4 = (0.93785)\,, \quad (3,3,2)_4 = (0.69646)$$

Station (5).

$$y(1)_5 = 252^\circ 59'\ 37''000$$

$$w(2)_5 = -\ 1''528\,, \quad y(2)_5 = 276\ 32\ 45.472$$

$$w(3)_5 = +\ 0.781\,, \quad y(3)_5 = 359\ 40\ 37.781$$

$$(ll,3) = 6.652$$

$$\beta_5'' = (9.74036)$$

$$(2,2,1)_5 = (1.00000)\,, \quad (3,3,2)_5 = (0.69680)$$

Die Werthe der Winkel, die sich aus den vorstehenden Richtungen ergeben, so wie die Summen der Fehlerquadrate stimmen mit denen, die die vorhergehende Methode ergeben hat, überein, wie aus der Vergleichung mit dem Art. 89 hervorgeht; die Werthe der Hülfsgrössen sind verschieden; wie nicht anders sein kann.

111.

Die Berechnung der $u(m)_s$ geschieht hier durch denselben Ausdruck wie im vorhergehenden Verfahren, nemlich durch

$$u(m)_s = -\frac{p_{m-1}}{P_{m-1}} \Sigma w(r)_s$$

wobei hier ausser den im Art. 90 beigefügten Bemerkungen noch angeführt werden kann, dass jetzt in diesem Ausdruck immer $w(1)_s = 0$ zu setzen ist. Dieselben a. a. O. angeführten Beispiele geben hier

$$\begin{array}{rlrlrl}
u(1)_1 &= -\ 0''158\,, & u(1)_2 &= -\ 0''151\,, & u(1)_3 &= +\ 0''160 \\
u(9)_1 &= -\ 0.708\,, & u(4)_2 &= -\ 0.565\,, & u(4)_3 &= +\ 0.140 \\
u(14)_1 &= -\ 0.322\,, & u(8)_2 &= -\ 0.358\,, & & \\
u(21)_1 &= -\ 0\ 508\,, & & & &
\end{array}$$

die gleichwie die $w(r)_s$ und $y(r)_s$ von denen des ersten Verfahrens verschieden sind. Aber aus demselben Grunde, aus welchem in beiden Verfahren die Unterschiede der $y(r)_s$ einander gleich sein müssen, müssen auch die Aggregate $u(m)_s + w(r)_s$, die denselben Gruppen von Gyris angehören, in beiden Verfahren einander gleich werden, die Richtung mag in der betr. Gruppe beobachtet sein, oder nicht. Z. B.

Erstes Verfahren.	Zweites Verfahren.
$u(1)_1 + w(a)_1 = +0''571 - 0''111 = +0''460$	$= -0''158 + 0''617 = +0''459$
$u(1)_1 + w(b)_1 = +0.571 - 1.030 = -0.459$	$= -0.158 - 0.302 = -0.460$
$u(1)_1 + w(1)_1 = +0.571 - 0.728 = -0.157$	$= -0.158 \quad 0 \quad = -0.158$
$u(1)_1 + w(2)_1 = +0.571 + 0.821 = +1.392$	$= -0.158 + 1.549 = +1.391$
$u(1)_1 + w(3)_1 = +0.571 - 0.245 = +0\ 326$	$= -0.158 + 0.483 = +0.325$
$u(1)_1 + w(4)_1 = +0.571 - 0.862 = -0.291$	$= -0.158 - 0.134 = -0.292$
$u(21)_1 + w(1)_1 = +0.220 - 0.728 = -0.508$	$= -0.508 \quad 0 \quad = -0.508$
$u(1)_2 + w(1)_2 = +0.062 - 0.213 = -0.151$	$= -0.151 \quad 0 \quad = -0.151$
$u(1)_2 - w(3)_2 = +0.062 + 1.087 = +1.149$	$= -0.151 + 1.301 = +1{,}150$

Nicht nur die Aggregate $u(m)_s + x(r)_s$, sondern auch die $u(m)_s$ selbst sind bei dem gegenwärtigen Verfahren eben so wie die Winkel, oder die Unterschiede der Richtungen, bestimmte Grössen.

112.

Die Bedingungsgleichungen bleiben nun eben so wie sie im Art. 91 aufgestellt worden sind, und nach der Substitution der vorstehenden Werthe der $y(r)_s$, ergeben sich dieselben Werthe der $F(I)$, $F(II)$, etc.

Die Differentiale der Bedingungsgleichungen, die im Art. 92 enthalten sind, erleiden daher keine weiteren Veränderungen als dass die Glieder, die mit $\delta(1)_1$, $\delta(1)_2$, $\delta(1)_3$, $\delta(1)_4$, $\delta(1)_5$ multiplicirt sind, wegfallen. In der im Art. 93 gegebenen Zusammenstellung der Coefficienten dieser Gleichungen muss man jetzt die erste Zeile jeder Abtheilung der Tafel sich hinweg denken. Zur Berechnung der $\eta(r,I)_s$ ergeben sich jetzt die folgenden Ausdrücke, die mehr oder minder abgekürzt, auf allen Stationen Geltung haben, und durch die Vertauschung der Zahl I mit II, III, etc. auf alle Bedingungsgleichungen anzuwenden sind.

$$\begin{aligned}
\eta(2,I)_s &= q(2,I)_s \\
\eta(3,I)_s &= \beta_s''.q(2,I)_s + q(3,I)_s \\
\eta(4,I)_s &= \beta_s'''.q(2,I)_s + \gamma_s'''.q(3,I)_s + q(4,I)_s \\
\eta(a,I)_s &= \beta_s^{IV}.q(2,I)_s + \gamma_s^{IV}.q(3,I)_s + \delta_s^{IV}.q(4,I)_s \\
\eta(b,I)_s &= \beta_s^{V}.q(2,I)_s + \gamma_s^{V}.q(3,I)_s + \delta_s^{V}.q(4,I)_s
\end{aligned}$$

Die beiden letzten kürzen sich ab, weil $q(a,I)$ und $q(b,I)$ Null sind. Die Rechnung gab

r	s	$\log \eta(r,I)_s$	$\log \eta(r,II)_s$	$\log \eta(r,III)_s$	$\log \eta(r,IV)_s$	$\log \eta(r,V)_s$	$\log \eta(r,VI)_s$
2	1	—	0.	0. n	—	9.81470	—
3		0. n	9.17609	9.17609n	0.	8.99079	9.28926
4		8.96417n	8.14082	9.99395	9.95799n	9.90910	9.91385
a		9.62332n	9.51809	9.18002	8.78509n	9.77889	9.66989
b		9.92410n	9.66883	9.61894	8.63010n	0.00527	9.94010
2	2	—	—	—	—	0.40289	0.05406
3		—	—	0.	—	9.69181n	9.48979
4		—	—	9.78336	0. n	9.37606	9.80784
2	3	0. n	0.	—	—	—	—
3		9.76662	9.61881	—	—	—	—
2	4	0.	—	—	0. n	—	9.69538n
3		9.64573	—	—	9.74639	—	9.20078n
2	5	—	0. n	0.	—	9.70523	—
3		—	9.65322	9.74036	—	9.17325n	—

113.

Zur Berechnung der $f(r,I)_s$, etc. dienen jetzt die folgenden allgemeinen Ausdrücke,

$$f(2,I)_s = Q(2,I)_s + \beta_s''.Q(3,I)_s + \beta_s'''.Q(4,I)_s + \beta_s^{IV}.Q(a,I)_s + \beta_s^{V}.Q(b,I)_s$$
$$f(3,I)_s = Q(3,I)_s + \gamma_s'''.Q(4,I)_s + \gamma_s^{IV}.Q(a,I)_s + \gamma_s^{V}.Q(b,I)_s$$
$$f(4,I)_s = Q(4,I)_s + \delta_s^{IV}.Q(a,I)_s + \delta_s^{V}.Q(b,I)_s$$
$$f(a,I)_s = Q(a,I)_s + \varepsilon_s^{V}.Q(b,I)_s$$
$$f(b,I)_s = Q(b,I)_s$$

in welchen die $Q(2,I)_s$, etc. dieselbe Bedeutung haben wie in dem ersten Verfahren, und die auch auf alle Bedingungsgleichungen auszudehnen sind. Für das Beispiel ergab sich

r	s	log $Q(r,I)_s$	log $Q(r,II)_s$	log $Q(r,III)_s$	log $Q(r,IV)_s$	log $Q(r,V)_s$	log $Q(r,VI)_s$
2	1	—	9.00000	9.00000n	—	8.81470	—
3		8.66370n	7.83979	7.83979n	8.66370	7.65449	7.95296
4		7.86211n	7.03876	8.89189	8.85593n	8.80704	8.81179
a		8.22742n	8.12219	7.78412	7.38919n	8.38299	8.27399
b		9.07529n	8.82002	8.77013	7.78129n	9.15646	9.09129
2	2	—	—	—	—	9.66253	9.31370
3		—	—	9.25964	—	8.56393n	8.36191
4		—	—	8.68752	8.90416n	8.28022	9.71200
2	3	8.82876n	8.82876	—	—	—	—
3		8.87622	8.72841	—	—	—	—
2	4	9.06215	—	—	9.06215n	—	8.75753n
3		8.94927	—	—	9.04993	—	8.50432n
2	5	—	9.00000n	9.00000	—	6.70523	—
3		—	8.95642	9.04356	—	8.47645n	—

r	s	log $f(r,I)_s$	log $f(r,II)_s$	log $f(r,III)_s$	log $f(r,IV)_s$	log $f(r,V)_s$	log $f(r,VI)_s$
2	1	8.83288n	9.13431	8.84806n	7.36078	9.15129	8.81953
3		9.18673n	8.83288	8.71839	8.52349	9.14907	9.10192
4		9.08039n	8.81798	9.12339	8.89365n	9.30588	9.26185
a		9.03858n	8.81015	8.71475	7.85406n	9.13210	9.05945
b		9.07529n	8.82002	8.77013	7.78129n	9.15646	9.09129
2	2	—	—	8.58784	8.48134n	9.65988	9.36485
3		—	—	9.01731	8.68752n	8.39901n	8.73477
4		—	—	8.68752	8.90416n	8.28022	8.71200
2	3	8.55814n	8.95260	—	—	—	—
3		8.87622	8.72841	—	—	—	—
2	4	9.18960	—	—	8.81799n	—	8.85336n
3		8.94927	—	—	9.04993	—	8.50432n
2	5	—	8.70116n	9.20629	—	8.05697n	—
3		—	8.95642	9.04356	—	8.47645n	—

114.

Die Berechnung der Coefficienten der Endgleichungen wird hier eben so ausgeführt wie in dem ersten Verfahren. Es ergab sich

i	(i,I)	(i,II)	(i,III)	(i,IV)	(i,V)	(i,VI)
I	0.41981	−0.10421	−0.05229	−0.09915	−0.14096	−0.19780
II		0.36660	−0.12073	+0.00229	+0.12312	+0.06600
III			0.46821	−0.12928	+0.02412	+0.17104
IV				0.36980	−0.08036	−0.06841
V					1.44453	+0.71131
VI						0.47808

Vergleicht man diese Coefficienten mit denen des Art. 95, die das erste Verfahren gegeben hat, so wird man finden, dass sie, abgesehen von den kleinen Unterschieden der letzten Stelle, die von den Fehlern der letzten Stelle der angewandten Logarithmen herrühren, mit diesen identisch sind, obgleich die Hülfsgrössen, die zu ihrer Berechnung gedient haben, in beiden Verfahren sehr von einander verschieden sind. Es ist dieses kein Zufall, sondern es lässt sich leicht zeigen, dass die Endgleichungen identisch dieselben werden müssen, wie man auch das vorhergehende Verfahren eingerichtet haben mag.

Wir brauchen also die Endgleichungen nicht von Neuem aufzulösen, sondern die Werthe der Unbekannten (I), (II), etc., die im Art. 95 gefunden wurden, haben auch hier Geltung.

Auch die Summe der mit ihren Gewichten multiplicirten Fehlerquadrate wird dieselbe, die durch das erste Verfahren gefunden wurde.

115.

Um die Werthe der letzten Verbesserungen $z(r)_s$ zu finden, dient nun wieder die allgemeine Gleichung

$$z(r)_s = f(r,I)_s.(I) + f(r,II)_s.(II) + f(r,III)_s.(III) + \dots$$

in welcher aber die Werthe der $f(r,I)_s$, etc. angewandt werden müssen, die das gegenwärtige Verfahren gegeben hat. Es folgt von selbst daraus, dass alle $z(1)_s = 0$ sind. Wir bekommen nun

$$z(2)_1 = -0''033\,,\quad z(2)_2 = -0''585\,,\quad z(2)_3 = +0''488$$
$$z(3)_1 = -0.547\,,\quad z(3)_2 = +0.490\,,\quad z(3)_3 = +0.546$$
$$z(4)_1 = +0.352\,,\quad z(4)_2 = +0.404$$
$$z(a)_1 = -0.144$$
$$z(b)_1 = -0.174$$
$$z(2)_4 = +1''332\,,\quad z(2)_5 = +0''703$$
$$z(3)_4 = -0.153\,,\quad z(3)_5 = +1.258$$

und zieht man diese von den im Art. 110 enthaltenen Werthen der $y(r)_s$ ab, so ergeben sich die folgenden wahrscheinlichsten Werthe der Richtungen,

$$x(1)_1 = 63^\circ 14' 10''000\,,\quad x(1)_2 = 27^\circ 55'\ 7''000$$
$$x(2)_1 = 96\ 29\ 53.582\,,\quad x(2)_2 = 45\ 16\ 35.887$$
$$x(3)_1 = 308\ 51\ 38.030\,,\quad x(3)_2 = 64\ 53\ 36.811$$
$$x(4)_1 = 215\ 58\ 16.514\,,\quad x(4)_2 = 342\ 17\ 11.425$$
$$x(a)_1 = 106\ \ 5\ 29.761\,,$$
$$x(b)_1 = 269\ 57\ 22.872\,,$$
$$x(1)_3 = 179^\circ 43'\ 9''000\,,\quad x(1)_4 = 88^\circ 37' 44''000$$
$$x(2)_3 = 243\ 45\ 34.193\,,\quad x(2)_4 = 128\ 57\ 57.503$$
$$x(3)_3 = 268\ 36\ 49.352\,,\quad x(3)_4 = 170\ 26\ 40.832$$
$$x(1)_5 = 252^\circ 59' 37''000$$
$$x(2)_5 = 276\ 32\ 44.769$$
$$x(3)_5 = 359\ 40\ 36.523$$

Vergleicht man die hieraus folgenden Winkel mit denen des Art. 96, die durch das erste Verfahren erhalten worden sind, so wird man eine Uebereinstimmung finden, die nichts zu wünschen übrig lässt.

Will man auch die wahrscheinlichsten Werthe der $u(m)_s$ kennen lernen, so dient dazu wieder der Ausdruck

$$u(m)_s = \frac{p_{m-1}}{P_{m-1}} \Sigma\,(z(r)_s - w(r)_s)$$

für welchen die Bemerkungen des Art. 111 wieder gelten.

116.

Die Berechnung der Gewichte ist bei dem gegenwärtigen Verfahren im Allgemeinen dieselbe wie beim ersten Verfahren, nur findet in Bezug auf die der Winkel $x(r)_s - x(1)_s$ eine Ausnahme statt. Da diese Winkel gegenwärtig die Unbekannten selbst sind, so fällt die Berech-

nung der Grössen in deren Bezeichnung M vorkommt weg, und es ist nach den Ausdrücken der Artt. 44 u. 48 zu verfahren.

Als Beispiel soll hier das Gewicht des Winkels

$$x(2)_1 - x(1)_1$$

berechnet werden, welches im Art. 97 nach dem ersten Verfahren schon berechnet wurde. In der hier eingeführten Bezeichnung giebt der Art. 44 sogleich

$$\pi(2)_1 = \frac{1}{(2,2,1)_1} + \frac{\beta_1''^2}{(3,3,2)_1} + \frac{\beta_1'''^2}{(4,4,3)_1} + \frac{\beta_1''^2}{(a,a,4)_1} + \frac{\beta_1^{v2}}{(b,b,5)_1}$$

und aus dem Art. 48 bekommt man

$$\begin{aligned}
f(2,II,1)_1 &= f(2,II)_1 + f(2,I)_1 \,.\, (2)_1 \\
f(2,III,1)_1 &= f(2,III)_1 + f(2,I)_1 \,.\, (3)_1 \\
f(2,IV,1)_1 &= f(2,IV)_1 + f(2,I)_1 \,.\, (4)_1 \\
\text{etc.} & \qquad \text{etc.} \\
\hline
f(2,III,2)_1 &= f(2,III,1)_1 + f(2,II,1)_1 \,.\, (3)_2 \\
f(2,IV,2)_1 &= f(2,IV,1)_1 + f(2,II,1)_1 \,.\, (4)_2 \\
\text{etc.} & \qquad \text{etc.} \\
\hline
f(2,IV,3)_1 &= f(2,IV,2)_1 + f(2,III,2)_1 \,.\, (4)_3 \\
\text{etc.} & \qquad \text{etc.} \\
\text{etc.} & \qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

woraus

$$\mu(2)_1 = \frac{f(2,I)_1^2}{(I,I)} + \frac{f(2,II,1)_1^2}{(II,II,1)} + \frac{f(2,III,2)_1^2}{(III,III,2)} + \text{etc.}$$

folgt. Das Gewicht P wird hierauf

$$P = \frac{1}{\pi(2)_1 - \mu(2)_1}$$

Für unser Beispiel bekommt man

$$\pi(2)_1 = 0.13625$$

$$f(2,I)_1 = -0.06807\,, \quad f(2,IV,3)_1 = -0.01777$$

$$f(2,II,1)_1 = +0.11934\,, \quad f(2,V,4)_1 = +0.08540$$

$$f(2,III,2)_1 = -0.03215\,, \quad f(2,VI,5)_1 = -0.00217$$

$$\mu(2)_1 = 0.06200$$

und hiemit

$$P = 13,47$$

wie im Art. 97.

117.

Es soll als zweites Beispiel hier noch das Gewicht von

$$u(1)_3$$

berechnet werden, welcher Bogen mit dem Aggregat $u(1)_3 + x(1)_3$ des ersten Verfahrens identisch ist. Das Verfahren des vor. Art. ist hier nicht zulässig, sondern es muss statt dessen das allgemeine Verfahren angewandt werden. Da hier

$$u(1)_s = -\tfrac{1}{2}x(2)_3$$

ist, so wird $\Omega = -\tfrac{1}{2}\delta x(2)_3$ und folglich

$$k(2)_3 = -\tfrac{1}{2}, \quad k(3)_3 = 0$$

und ferner wird

$$(M,2)_3 = k(2)_3 = -\tfrac{1}{2}$$
$$(M,3)_3 = \beta_3''. \, k(2)_3 = -(9.3178)$$

Hiemit wird zuerst

$$R = 0.02242$$

mit dem Art. 101 übereinstimmend, obgleich die Hülfsgrössen hier ganz andere Werthe haben wie dort. Man erhält ferner

$$(I,M) = +0.01809, \quad (II,M) = -0.04484$$
$$(III,M) = (IV,M) = (V.M) = (VI,M) = 0$$

wie im Art. 101, und hieraus folgt schon ohne weitere Fortsetzung der Rechnung, dass dasselbe Gewicht wie dort, nemlich

$$P = 67,37$$

erhalten wird. Man sieht hieraus, dass beide Verfahren, ungeachtet ihrer Verschiedenheit, für die Winkel, die übrigen bestimmten Bögen, und für die Gewichte dieselben Resultate geben, wie auch nicht anders sein kann.

118.

Vergleicht man diese beiden Verfahrungsarten in Bezug auf die Arbeit, die sie verursachen mit einander, so scheint das Urtheil darüber sich zu Gunsten des ersten Verfahrens zu neigen. Das letzte Verfahren führt freilich in seinem letzten Theil auf eine geringere Anzahl von Ausdrücken wie jenes, indem in den für die η und z auf jeder Station Ein Ausdruck weniger vorhanden ist, dagegen sind aber die zu berechnenden Hülfsgrössen in diesem Verfahren zusammengesetzter wie in dem Vorhergehenden, da sie aus einer grösseren Anzahl von Gliedern bestehen. Mir scheint, dass die Gesammtwirkung dieser beiden, einander entgegengesetzten, Umstände zu Gunsten des ersten Verfahrens ausfällt. Es kann übrigens Jeder bei der Ausgleichung eines Dreiecksnetzes sich ohne

vergebliche Mühe ein Urtheil über die relative Kürze dieser beiden Verfahrungsarten bilden, denn Nichts hindert sie untermischt anzuwenden. Man kann ohne Nachtheil für das Resultat auf einigen Stationen die eine, und auf anderen Stationen die andere dieser beiden Verfahrungsarten anwenden.

§. 5. **Ausdehnung des im Vorhergehenden entwickelten Verfahrens auf den Fall, in welchem mehr wie Eine Grundlinie gemessen worden ist, oder man das Dreiecksnetz an ein benachbartes anschliessen will.**

119.

Im Vorhergehenden ist immer angenommen worden, dass in dem Dreiecksnetz nur Eine Seite gegeben, oder mit anderen Worten nur Eine Grundlinie gemessen worden sei, wir wollen aber jetzt zur Betrachtung des Falles, wo zwei oder mehr Grundlinien gemessen worden sind, übergehen. Nehmen wir zuerst zwei gemessene Grundlinien an, dann ist klar, dass ausser den im Vorhergehenden erklärten Bedingungsgleichungen noch Eine vorhanden ist. Diese kann immer auf dieselbe Form gebracht werden wie die zweite Gattung der übrigen Bedingungsgleichungen, nur statt des Gliedes $= 1$ tritt das Verhältniss der beiden Grundlinien ein. Die neue Bedingungsgleichung ist daher immer

$$\frac{\sin\,[x(a) - x(b)]\,\sin\,[x(c) - x(d)]\,\ldots}{\sin\,[x(a') - x(b')]\,\sin\,[x(c') - x(d')]\,\ldots} - \frac{B'}{B} = 0$$

wenn B und B' die beiden gemessenen Grundlinien, und $x(a)$, $x(b)$, $x(c)$, $x(d)$, etc. $x(a')$, $x(b')$, $x(c')$, $x(d')$, etc. gewisse gemessene oder beobachtete Richtungen sind. Wenn mehr wie zwei Grundlinien gemessen worden sind, so kommen noch mehrere Bedingungsgleichungen wie die vorstehende hinzu, und zwar ist die Anzahl dieser dritten Gattung immer $= (m - 1)$, wenn m Grundlinien gemessen worden sind.

Wenn z. B. in dem oben behandelten Beispiel die Linien Seeberg-Inselsberg und Warte-Wachsenburg unmittelbar gemessen wären, so würde ausser den angeführten sechs Bedingungsgleichungen, noch die folgende siebente vorhanden sein,

$$\frac{\sin\,[x(3)_1 - x(4)_1 - 0''140]\,\sin\,[x(3)_3 - x(2)_3 - 0''211]}{\sin\,[x(1)_2 - x(4)_2 - 0.140]\,\sin\,[x(2)_4 - x(1)_4 - 0.211]} - \frac{B'}{B} = 0$$

wo

$$B' = \text{Seite (Warte-Wachsenburg)}$$
$$B = \text{Seite (Seeberg-Inselsberg)}$$

sind, und diese Bedingungsgleichung hätte sofort den übrigen sechs des Art. 91 hinzugefügt, und eben so behandelt werden müssen.

120.

Bleiben wir bei der Annahme von zwei gemessenen Grundlinien stehen, da das Hinzukommen von mehreren nur die Wiederholung desselben Verfahrens verlangt. Nachdem die Ausgleichungen auf den Stationen ausgeführt worden sind, sind in die Bedingungsgleichung des vor. Art. nicht nur die Werthe der Richtungen, die im Vorhergehenden mit $y(r)$, bezeichnet worden sind, sondern auch die durch die Messungen gefundenen Werthe der Grundlinien B und B' zu substituiren. Diese Gleichung wird nun im Allgemeinen so wenig wie die übrigen Bedingungsgleichungen den Werth Null geben, sondern statt dessen einen anderen, den ich den früheren Bezeichnungen analog $F(B)$ nennen werde, Die Einheit von $F(B)$ sei, wie oben bei den ähnlichen Grössen, die siebente Stelle des Briggischen Logarithmus.

Durch die Differentiation unserer Gleichung, nachdem sie auf die logarithmische Form gebracht worden ist, erhalten wir

$$\begin{aligned}&\frac{M}{r}\operatorname{cotg}[x(a)-x(b)]\delta[x(a)-x(b)]+\frac{M}{r}\operatorname{cotg}[x(c)-x(d)]\delta[x(c)-x(d)]+\ldots\\&-\frac{M}{r}\operatorname{cotg}[x(a')-x(b')]\delta[x(a')-x(b')]-\frac{M}{r}\operatorname{cotg}[x(c')-x(d')]\delta[x(c')-x(d')]-\ldots\\&+\frac{M}{B}\delta B-\frac{M}{B'}\delta B'+F(B)=0\end{aligned}$$

und in dieser Form ist diese Gleichung als eine der Gleichungen (30) der allgemeinen Aufgabe zu betrachten, und demgemäss eben so zu behandeln wie im Vorhergehenden von den übrigen Bedingungsgleichungen gezeigt worden ist. Damit in den Verbesserungen der Richtungen wieder die Secunde, und in den Verbesserungen δB und $\delta B'$ der Grundlinien dieselbe Einheit, in welcher diese ausgedrückt sind zur Einheit werde, ist mit Rücksicht auf die schon festgesetzte Einheit von $F(B)$, M dem Zehnmillionfachen des Moduls der Briggischen Logarithmen, und $r = 206265''$ zu setzen. Es wird daher

$$\log M = 6.63778$$
$$\log r = 5.31443$$

Die Coefficienten der Verbesserungen der Richtungen werden also eben so berechnet wie oben in den Bedingungsgleichungen zweiter Gattung.

121.

Man würde nun die Auflösung der vorliegenden Aufgabe, blos mit dem Unterschiede, dass zu den Unbekannten der vorhergehenden Aufgabe, in welcher nur Eine Grundlinie vorausgesetzt ist, die beiden neuen Unbekannten δB und $\delta B'$ hinzugekommen sind, nach den im Vorhergehenden abgeleiteten Erklärungen und Vorschriften rationel zu Ende führen können, wenn nicht noch eine Bedingung zu erfüllen wäre, die so beschaffen ist, dass sie, gegenwärtig wenigstens, gar nicht erfüllt werden kann.

Das Messen eines Winkels (oder einer Richtung) und das Messen einer Grundlinie sind zwei gänzlich von einander verschiedene Operationen, die eine directe Vergleichung ihrer relativen Genauigkeit gar nicht zulassen, aber dennoch muss man, um die im vor. Art. erhaltene Gleichung in Verbindung mit den übrigen Bedingungsgleichungen der Aufgabe weiter behandeln zu können, ein Maass der relativen Genauigkeit zwischen Winkel- oder Richtungsmessungen und Grundlinienmessungen kennen, indem in derselben sowohl die wahrscheinlichsten Verbesserungen dieser wie die jener die Unbekannten sind. Man muss, mit anderen Worten, den Fehler der Grundlinienmessungen kennen, der dieselbe Wahrscheinlichkeit besitzt, wie der Fehler von einer Secunde in den Winkel- oder Richtungsmessungen, und hieraus die Gewichte bestimmen, welche δB und $\delta B'$ beizulegen sind, während die Gewichte der Winkel- oder Richtungsmessungen gleich Eins gesetzt werden.

Von den mittleren Fehlern, womit die Messungen verschiedener Grundlinien behaftet sind, lässt sich im Voraus nur wenig sagen. Von zwei Grundlinien, die unter völlig gleichen Umständen gemessen sind, lässt sich mit Gewissheit behaupten, dass der mittlere Fehler der längeren grösser sein muss, wie der der kürzeren, denn die Fehlerquellen wiederholen sich bei jener öfterer wie bei dieser, aber dass die mittleren Fehler solcher Grundlinien ihren Längen proportional sein sollten, wie zuweilen behauptet worden ist, muss bestritten werden. Wenn angenommen werden dürfte, dass bei allen möglichen Fehlerquellen gleiche positive und negative Fehler gleiche Wahrscheinlichkeit hätten, so würde man die mittleren Fehler mehrerer unter völlig gleichen Umständen gemessenen Grundlinien den Quadratwurzeln aus ihren Längen proportional setzen können, aber diese Annahme ist auch nicht in aller Strenge

richtig, da es Fehlerquellen giebt, die stets in demselben Sinne wirken, z. B. die Fehler der Etalonirung der Messstangen.

Um die Wahrscheinlichkeit irgend eines gegebenen Fehlers in der Messung einer Grundlinie mit annehmbarer Annäherung bestimmen zu können, müsste man diese Grundlinie zu vielen wiederholten Malen gemessen haben, aber solche Wiederholungen dieser Messungen liegen gegenwärtig, wenigstens öffentlich, gar nicht vor, und die Schwierigkeit derselben, so wie der Zeit- und Kostenaufwand, den sie erfordern, veranlassen die Annahme, dass sie so bald noch nicht in der im Allgemeinen erforderlichen Ausdehnung vorhanden sein werden*). Man kann daher auch nicht die zur rationellen Anwendung der Gleichungen des vor. Art. erforderliche Bestimmung der Gewichte der Messungen der Grundlinien in Bezug auf die der Winkel- oder Richtungsmessungen ausführen, und muss daher vor der Hand von der strengen Benutzung derselben absehen.

122.

Der Fehler in den Messungen der Grundlinien, die mit den besten Apparaten und der grössten Sorgfalt ausgeführt sind, dessen Wahrscheinlichkeit der Wahrscheinlichkeit eines Fehlers von Einer Secunde in den Winkel- oder Richtungsmessungen gleichkommt, ist gewiss ein sehr kleiner Theil eines Meters, und bezeichnet man ihn für die verschiedenen Grundlinien mit $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{p'}$, etc. Meter, so werden p, p', etc. grosse Zahlen sein. Dem Vorhergehenden zufolge müssen nun den Bestimmungen der Grundlinien die Gewichte p^2, p'^2, etc. beigelegt werden wenn man den Bestimmungen der Richtungen das Gewicht $= 1$ beilegt. Aber im Laufe der Auflösung unserer Aufgabe treten diese Gewichte in die Nenner der Coefficienten der Gleichungen ein, und es wird dadurch bewirkt, dass in den Endgleichungen die Coefficienten der Verbesserungen der Grundlinien mit weit kleineren Coefficienten behaftet sind, wie die der Richtungen oder Winkel. Die Verbesserungen der Grundlinien werden daher selbst sehr klein, und äussern eine geringe Rückwirkung

*) Dem Vernehmen nach besitzt die Sternwarte Pulkowa, als Lehrmittel für die angehenden Geodäten, eine Probebasis nebst den dazu gehörigen Messapparaten. Es würde gewiss von Nutzen sein, wenn die damit gewonnenen Erfahrungen veröffentlicht würden.

auf die der Richtungen oder Winkel, und können daher ohne erhebliche Fehler in den letzteren zu veranlassen, übergangen werden; man kann, mathematisch zu reden, die Gewichte der Grundlinien in Bezug auf die der Winkel oder Richtungen unendlich gross setzen, wodurch die Verbesserungen jener Null werden. Die Gleichung des Art. 119 nimmt hierauf die folgende Form an,

$$\frac{M}{r}\mathrm{cotg}[x(a)-x(b)]\delta[x(a)-x(b)]+\frac{M}{r}\mathrm{cotg}[x(c)-x(d)]\delta[x(c)-x(d)]+\ldots$$
$$-\frac{M}{r}\mathrm{cotg}[x(a')-x(b')]\delta[x(a')-x(b')]-\frac{M}{r}\mathrm{cotg}[x(c')-x(d')]\delta[x(c')-x(d')]-\ldots+F(B)=0$$

und wird den Bedingungsgleichungen zweiter Gattung völlig ähnlich. Die Auflösung unserer Aufgabe besitzt nun die Eigenschaft, dass nicht nur den Bedingungen zwischen den Winkeln desselben vollständig Gnüge geleistet wird, sondern auch alle gemessenen Grundlinien genau dargestellt werden.

123.

Es wird nicht undienlich sein das Vorhergehende mit einigen Beispielen der einfachsten Art zu erläutern. Es soll zuerst das Dreiecksnetz aus einem einzigen Dreieck bestehen, in welchem alle drei Winkel und zwei Seiten gemessen worden sind. Ich nehme an, dass man erhalten habe

$$\begin{aligned}\alpha &= 40^0\ 0'\ 0''00\\ \beta &= 65\ \ 0\ \ 0.00\\ \gamma &= 75\ \ 0\ \ 3.00\\ a &= 1000.000\\ b &= 1409.978\end{aligned}\Bigg\}\ \text{Meter}$$

und dass die Seite a dem Winkel α, die Seite b dem Winkel β gegenüber liege. Hier finden zwei Bedingungsgleichungen statt, nemlich, wenn der sphärische Ueberschuss übergangen wird,

$$\alpha+\beta+\gamma-180^0=0$$
$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}-\frac{a}{b}=0$$

Die Substitution der vorstehenden Werthe hierin giebt

$$F(I)=+3''00,\quad F(II)=+41$$

und durch die Differentiation erhält man, mit Weglassung der Aenderungen von a und b,

$$\delta\alpha + \delta\beta + 3''00 = 0$$
$$+ 25.092\delta\alpha - 9.818\delta\beta + 41 = 0$$

und hieraus entsteht die folgende Zusammenstellung

r	$q(r,I)$	$q(r,II)$
α	$+1$	$+(1.39951)$
β	$+1$	$-(0.99202)$
γ	$+1$	0

Setzt man nun das Gewicht der Winkel $= 1$, so werden $q(r,I) = f(r,I)$, u. s. w. und folglich

$$(I,I) = 3\,, \quad (I,II) = +15.274\,, \quad (II,II) = 726.02$$

woraus man

$$(I) = +0''7979\,, \quad (II) = +(8.59862)\,, \quad W = 4.021$$

und hiemit

$$z(\alpha) = +1''794$$
$$z(\beta) = +0.408$$
$$z(\gamma) = +0.798$$

bekommt. Die wahrscheinlichsten Werthe der Winkel werden also

$$\alpha = 39^0\ 59'\ 58''206$$
$$\beta = 64\ \ 59\ \ 59.592$$
$$\gamma = 75\ \ 0\ \ 2.202$$

während die Seiten oder Grundlinien unverändert bleiben.

124.

Es soll jetzt dasselbe Beispiel mit der Abänderung vorgenommen werden, dass für die relative Genauigkeit der Messungen der Winkel und der Grundlinien eine Hypothese aufgestellt wird. Indem ich annehme, dass Eine Secunde Fehler in den Winkelmessungen dieselbe Wahrscheinlichkeit habe wie der Fehler von einem halben Millimeter in der Messung einer Grundlinie von Tausend Metern Länge, meine ich eine Hypothese aufgestellt zu haben, die wohl zuweilen mit dem wahren Sachverhalt übereinstimmen kann, lasse übrigens Jedem unbenommen, dafür eine andere einzuführen, wenn grössere Erfahrungen im Messen

von Grundlinien dafür sprechen sollten. Da meine Annahme hypothetisch ist, so soll sie für beide Grundlinien unverändert gelten. Die erste Zusammenstellung wird jetzt

r	$q(r,I)$	$q(r,II)$
α	+1	+(1.39954)
β	+1	−(0.99202)
γ	+1	0
a	0	−(3.63778)
b	0	+(3.48857)

wo die a und b gegenüberstehenden Zahlen, dem Art. 120 gemäss, die Werthe von $-\frac{M}{a}$ und $+\frac{M}{b}$ sind. Da der obigen Hypothese zufolge das Gewicht der Grundlinien $= (2000)^2$ gesetzt werden muss, während das der Winkel $= 1$ ist, so ergiebt sich die folgende Zusammenstellung

r	$f(r,I)$	$f(r,II)$
α	+1	+(1.39954)
β	+1	−(0.99202)
γ	+1	0
a	0	−(7.03572−10)
b	0	+(6.88651−10)

Hiemit werden nach und nach

$$(I,I) = 3\,,\quad (I,II) = +15.274\,,\quad (II,II) = 733.11$$

$$(I) = +\,0''8001$$

$$(II) = +(8.59390)$$

$$W = 4.010$$

$$z(\alpha) = +1''785\,,\qquad z(a) = -0^{m}000044$$

$$z(\beta) = +0.415\,,\qquad z(b) = +0.000030$$

$$z(\gamma) = +0.800\,,$$

$$\alpha = 39^{0}\,59'\,58''215\,,\qquad a = 1000^{m}000044$$

$$\beta = 64\;\;59\;\;59.585\,,\qquad b = 1409.977970$$

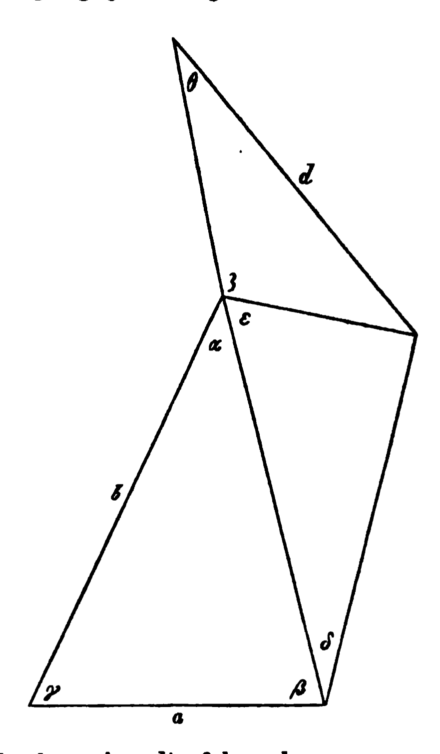
$$\gamma = 75\;\;0\;\;2.200$$

Diese Werthe der Winkel sind keine volle Hundertstelsecunde von den vorher erhaltenen verschieden, und die Aenderungen der Grundlinien höchst unbedeutend. Auch die Summe der Fehlerquadrate hat sich un-

bedeutend verkleinert, indem sie nur 0.011 kleiner geworden ist, wie bei der vorhergegangenen Behandlung dieser Aufgabe.

125.

Um einen zusammengesetzteren Fall vorzuführen nehme ich an, dass im Dreiecksnetze, welches die folgende Figur darstellt, die eingeschriebenen Winkel und Seiten gemessen seien, die ich so gewählt habe, dass nur drei Bedingungsgleichungen vorhanden sind.



Die erhaltenen Werthe seien die folgenden,

$$\begin{aligned}
\alpha &= 40^{\circ}\ 0'\ 0''00 \\
\beta &= 65\ \ 0\ 0.00 \\
\gamma &= 75\ \ 0\ 3.00 \\
\delta &= 29\ 45\ 0.00 \\
\varepsilon &= 66\ 30\ 0.00 \\
\zeta &= 111\ 40\ 0.00 \\
\theta &= 31\ \ 0\ 0.00 \\
a &= 1000^{m}000 \\
b &= 1409.978 \\
d &= 1353.567
\end{aligned}$$

Die beiden ersten Bedingungsgleichungen sind nun dieselben wie im vorhergehenden Beispiel, und die dritte wird

$$\frac{\sin\gamma\sin\delta\sin\zeta}{\sin\alpha\sin(\delta+\varepsilon)\sin\theta}-\frac{d}{a}=0$$

Ferner wird

$$F(I)=+3''00\,,\quad F(II)=+41\,,\quad F(III)=-27$$

$$-(1.39954)\delta\alpha+(0.75142)\delta\gamma+(1.59267)\delta\delta+(0.36283)\delta\varepsilon$$
$$-(0.92244)\delta\zeta-(1.54458)\delta\theta-27=0$$

und man bekommt, wenn die Seiten unveränderlich angenommen werden,

r	$q(r,I)$	$q(r,II)$	$q(r,III)$
α	+1	+(1.39954)	−(1.39954)
β	+1	−(0.99202)	0
γ	+1	0	+(0.75142)
δ	0	0	+(1.59267)
ε	0	0	+(0.36283)
ζ	0	0	−(0.92244)
θ	0	0	−(1.54458)

$$(I,I)=3\,,\quad (I,II)=+15.274\,,\quad (I,III)=-\ 19.450$$
$$(II,II)=726.02\,,\quad (II,III)=-\ 629.63$$
$$(III,III)=3496.9$$

$$(I)=+0''9045$$
$$(II)=+(8.88837)$$
$$(III)=+(8.66273)$$
$$W=4.642$$

$$z(\alpha)=+1''691\,,\qquad z(\delta)=+1''801$$
$$z(\beta)=+0.145\,,\qquad z(\varepsilon)=+0.106$$
$$z(\gamma)=+1.164\,,\qquad z(\zeta)=-0.385$$
$$z(\theta)=-1.612$$

und die wahrscheinlichsten Werthe

$$\alpha=39^0\,59'\,58''309\,,\qquad \delta=29^0\,44'\,58''199$$
$$\beta=64\ \ 59\ \ 59.855\,,\qquad \varepsilon=66\ \ 29\ \ 59.894$$
$$\gamma=75\ \ 0\ \ 1.836\,,\qquad \zeta=111\ \ 40\ \ 0.385$$
$$\theta=31\ \ 0\ \ 1.612$$

126.

Nimmt man auch auf die Aenderungen der Seiten oder Grundlinien dieses Beispiels Rücksicht, und nimmt das Gewicht derselben eben so an wie oben, so ergeben sich die folgenden Zusammenstellungen

r	$q(r,I)$	$q(r,II)$	$q(r,III)$	$f(r,I)$	$f(r,II)$	$f(r,III)$
α	+1	+(1.39954)	−(1.39954)	+1	+(1.39954)	−(1.39954)
β	+1	(0.99202)	0	+1	−(0.99202)	0
γ	+1	0	+(0.75142)	+1	0	+(0.75142)
δ	0	0	+(1.59267)	0	0	+(1.59267)
ε	0	0	+(0.36283)	0	0	+(0.36283)
ζ	0	0	−(0.92244)	0	0	−(0.92244)
θ	0	0	−(1.54458)	0	0	−(1.54458)
a	0	−(3.63778)	+(3.63778)	0	−(7.03572)	+(7.03572)
b	0	+(3.48857)	0	0	+(6.88651)	0
d	0	0	−(3.50630)	0	0	−(6.90424)

$(I,I) = 3\,,\quad (I,II) = +15.274\,,\quad (I,III) = -19.450$

$(II,II) = 733.11\,,\quad (II,III) = -634.35$

$(III,III) = 3504.2$

$(I) = +0''9065$

$(II) = +(8.88453)$

$(III) = +(8.66071)$

$W = 4.626$

$z(\alpha) = +1''681\,,\quad z(\delta) = +1''792\,,\quad z(a) = -0^m0000335$

$z(\beta) = +0.154\,,\quad z(\varepsilon) = +0.106\,,\quad z(b) = +0.0000590$

$z(\gamma) = +1.165\,,\quad z(\zeta) = -0.383\,,\quad z(d) = -0.0000367$

$z(\theta) = -1.604$

und die wahrscheinlichsten Werthe

$\alpha = 39^0\,59'\,58''319\,,\quad \delta = 29^0\,44'\,58''208$

$\beta = 64\;59\;59.846\,,\quad \varepsilon = 66\;29\;59.894$

$\gamma = 75\;0\;1.835\,,\quad \zeta = 111\;40\;0.383$

$\theta = 31\;0\;1.604$

$a = 1000^m0000335$

$b = 1409.9779410$

$d = 1353.5670367$

Diese Werthe der Winkel sind von denen des vor. Art. höchstens 0″01 verschieden, und die Verbesserungen der Seiten oder Grundlinien sind wieder sehr klein. Auch die Summe der Fehlerquadrate ist durch die Zuziehung der Aenderungen der Grundlinien nur 0.016 kleiner geworden.

127.

Das Messen von mehr wie Einer Grundlinie in einem Dreiecksnetze trägt wesentlich zur genaueren Bestimmung der einzelnen Stücke desselben bei, und darf daher nie in einem Netze von bedeutender Ausdehnung unterlassen werden. In der Ausgleichung des Dreiecksnetzes spricht sich diese grössere Genauigkeit dadurch aus, dass die Gewichte der Unbekannten grösser werden, und die Vergrösserung dieser kann in einzelnen Fällen bedeutend werden. Um hievon ein Beispiel zu geben, will ich annehmen, dass in dem Dreiecksnetze, welches im Vorhergehenden zum Hauptbeispiel gedient hat, und im Art. 91 abgebildet ist, die beiden Seiten (1)(3) und (2)(4) direct gemessen worden seien. Ausser den bisherigen sechs Bedingungsgleichungen erhalten wir jetzt eine siebente, und diese ist die im Art. 103 erhaltene Relation zwischen den beiden eben genannten Seiten, die aber jetzt wie folgt gestellt werden muss,

$$\frac{\sin\,[x(3)_1 - x(4)_1 - 0''140]\,\sin\,[x(3)_3 - x(2)_3 - 0''211]}{\sin\,[x(1)_2 - x(4)_2 - 0''140]\,\sin\,[x(2)_4 - x(1)_4 - 0''211]} - \frac{(2)(4)}{(1)(3)} = 0$$

Um diese Sache möglichst kurz behandeln zu können will ich annehmen, dass die für diese beiden Seiten oder Grundlinien erhaltenen Werthe dieselben seien die a. a. O. erhalten wurden, woraus die Folge ist, dass die oben für die Winkel dieses Dreiecksnetzes erhaltenen, wahrscheinlichsten Werthe sowohl wie die Summe der übrig bleibenden Fehlerquadrate dieselben bleiben müssen.

128.

Das Differential der eben aufgestellten neuen Bedingungsgleichung ist nun

$$+\ 1.0627\delta x(4)_1 - 1.0627\delta x(3)_1 - 20.596\delta x(1)_2 + 20.596\delta x(4)_2$$
$$-45.454\ \delta x(2)_3 + 45.454\delta x(3)_3 + 24.794\delta x(1)_4 - 24.794\delta x(2)_1 - 21.1 = 0$$

indem die Substitution der Werthe der $y(r)_s$ des Art. 89 in diese Bedingungsgleichung

$$F(VII) = -21.1$$

giebt. Die Tafeln der Artt. 93 u. 94 bekommen jetzt in Bezug auf die neu eingeführte Bedingungsgleichung die folgenden Zusätze,

r	s	$\log q(r,VII)_s$	$\log \eta(r,VII)_s$	$\log Q(r,VII)_s$	$\log f(r,VII)_s$
1	1	—	—	—	—
2		—	—	—	7.38719n
3		0.02641n	0.02641n	8.68071n	8.54988n
4		0.02641	9.98535	8.88316	8.92007
a		—	9.14832	7.64415	7.88050
b		—	9.01038	7.80770	7.80770
1	2	1.31378n	1.31378n	9.92461n	9.92461n
2		—	—	—	9.33596n
3		—	—	—	9.21035
4		1.31378	1.31378	9.90906	9.90906
1	3	—	—	—	—
2		1.65757n	1.65757n	0.21572n	0.21572n
3		1.65757	1.65757	0.53379	0.53379
1	4	1.39436	1.39436	0.34363	0.34363
2		1.39436n	1.39436n	0.21235n	0.21235n
3		—	—	—	—
1	5	—	—	—	—
2		—	—	—	—
3		—	—	—	—

und hieraus ergeben sich die folgenden Werthe der Coefficienten der Endgleichungen, die denen des Art. 95 hinzuzufügen sind,

$$(I,VII) = +1.2603\,, \quad (V,VII) = +0.4577$$
$$(II,VII) = -1.6457\,, \quad (VI,VII) = +2.8900$$
$$(III,VII) = +1.0885\,, \quad (VII,VII) = 359.35$$
$$(IV,VII) = -0.1398$$

Die Ergänzung der Auflösung der Endgleichungen giebt nun

$$(7)_1 = -(0.47740)\,, \quad (7)_4 = -(0.06444)$$
$$(7)_2 = +(0.59234)\,, \quad (7)_5 = -(9.97330)$$
$$(7)_3 = -(0.24687)\,, \quad (7)_6 = -(1.83334)$$
$$(VII,VII,6) = (2.19962)\,, \quad R_7 - R_6 = 0.000001 = 0$$
$$(VII) = +0.00024 = 0$$

die sich den, auf ähnliche Weise bezeichneten Grössen des Art. 95 anschliessen. Aus diesen Werthen von (VII) und $R_7 - R_6$, welche $= 0$ zu erachten sind, zeigt sich die obige Behauptung bestätigt, dass sowohl die Werthe der Unbekannten, wie die Summe der Fehlerquadrate unverändert bleiben.

129.

Im Art. 103 fanden wir das Gewicht der Seite Warte-Wachsenburg, oder (2)(4), in sofern dieselbe aus der Seite Seeberg-Inselsberg, oder (1)(3), bestimmt wird, $= 341.2$, es folgt aber aus dem Art. 52, dass dieses Gewicht jetzt unendlich gross gefunden werden muss. Um zu zeigen, dass die Rechnung es jetzt in der That so giebt, ist zu bemerken, dass dem im Art. 103 erhaltenen Werthe von S der Werth des Gliedes

$$\frac{(VII,M,6)^2}{(VII,VII)}$$

hinzugefügt werden muss, und die Rechnung weiter keine Aenderung erleidet. Nun findet man aber leicht aus den vorhergehenden Zahlenangaben

$$(VII,M) = +1.54558\,, \quad (VII,M,6) = +0.68116$$

hieraus

$$\frac{(VII,M,6)^2}{(VII,VII)} = 0.0029301$$

und wenn man diesen Werth dem a. a. O. für S erhaltenen hinzufügt

$$S = 0.0066477 = R$$

folglich

$$P = \infty$$

wie es sein muss.

130.

Um an einem Beispiel zu zeigen wie gross die Vergrösserung des Gewichts unter Umständen werden kann, soll das Gewicht der Seite Seeberg-Warte, oder (1)(2), in Bezug auf die Seite Seeberg-Inselsberg, oder (1)(3), berechnet werden. Der Ausdruck ist, mit Weglassung der sphärischen Ueberschüsse, die hier nicht in Betracht kommen, da die genaue Berechnung der Seite selbst für unsern Zweck überflüssig ist,

$$(1)(2) = \frac{\sin\,[x(2)_3 - x(1)_3]\,\sin\,[x(2)_5 - x(1)_5]}{\sin\,[x(3)_2 - x(1)_2]\,\sin\,[x(3)_5 - x(2)_5]}\,(1)(3)$$

Da hieraus mit ausreichender Genauigkeit

$$\log (1)(2) = 4.09301$$

folgt, so giebt die Differentiation

$$\Omega = \text{const.} + 0^m029241\delta[(2)_3 - (1)_3] + 0^m137781\delta[(2)_5 - (1)_5]$$
$$- 0.079774\delta[(3)_2 - (1)_2] - 0.007235\delta[(3)_5 - (2)_5]$$

folglich

$$(M,1)_2 = +0.079974\,,\quad (M,2)_3 = +0.029241$$
$$(M,3)_2 = -0.079974\,,\quad (M,1)_5 = -0.137781$$
$$(M,4)_2 = -(8.20315)\,,\quad (M,2)_5 = +0.145016$$
$$(M,1)_3 = -0.29241\,,\quad (M,3)_5 = -0.007235$$
$$R = 0.0038990$$

$$(I,M) = -0.001507$$
$$(II,M) = -0.005319\,,\quad (II,M,1) - -0.005582$$
$$(III,M) = +0.014220\,,\quad (III,M,2) = +0.011898$$
$$(IV,M) = +0.003884\,,\quad (IV,M,3) = +0.007640$$
$$(V,M) = +0.000564\,,\quad (V,M,4) = +0.002903$$
$$(VI,M) = -0.004330\,,\quad (VI,M,5) = -0.008790$$
$$S = 0.0025438$$
$$P = 738.0$$

Dieses ist das Gewicht der Seite Seeberg-Warte, wenn man annimmt, dass nur die Grundlinie Seeberg-Inselsberg vorhanden ist, nimmt man hingegen an, dass auch die Grundlinie Warte-Wachsenburg gemessen worden ist, so kommen zu den vorstehenden Grössen noch

$$(VII,M) = -0.12806\,,\quad (VII,M,6) = +0.41955$$

hinzu, und es werden

$$S = 0.0036554$$
$$P = 4105$$

also das Gewicht beinahe sechs Mal grösser.

Im Allgemeinen verhält sich diese Sache so. Denkt man sich ein aus einer grossen Anzahl von Dreiecken bestehendes Netz und nur Eine gemessene Grundlinie, so werden, unter sonst gleichen Umständen, die Dreiecksseiten, die in der Nähe der Grundlinie liegen, die grössten Gewichte bekommen, je weiter aber eine Dreiecksseite von der Grundlinie entfernt ist, desto kleiner wird ihr Gewicht ausfallen. Stellt man sich nun vor, dass möglichst weit von jener entfernt eine zweite

Grundlinie gemessen werde, so werden zwar die Gewichte aller Dreiecksseiten vergrössert werden, aber die bedeutendste Vergrösserung der Gewichte wird die Dreiecksseiten treffen, die in der Nähe der zweiten Grundlinie liegen, und vorher die kleinsten Gewichte bekamen; eben so verhält es sich wenn mehr wie zwei Grundlinien gemessen worden sind.

131.

Mit dem Vorhergehenden steht der Fall in der engsten Beziehung, dass man ein auszugleichendes Dreiecksnetz an ein benachbartes, schon ausgeglichenes, anschliessen will. Man kann nemlich immer zwischen der Anschlussseite des benachbarten Netzes und der nächsten Grundlinie des auszugleichenden eine Bedingungsgleichung von derselben Form, wie die des Art. 119, aufstellen, in welcher im letzten Gliede statt der einen Grundlinie die Anschlusslinie eintritt. Diese Bedingungsgleichung ist den übrigen, die das auszugleichende Dreiecksnetz darbietet, hinzuzufügen, und eben so wie diese zu behandeln. Da die Anschlussseite genau dargestellt werden muss, so ist im Differential dieser Bedingungsgleichung das Differential der Anschlussseite gleich Null zu setzen.

132.

Die vorstehenden Betrachtungen führen uns auf einen Fall hin, der einer gleichen Behandlung unterworfen werden kann.

Wenn das auszugleichende Dreiecksnetz sehr gross ist, so kann es sich ereignen, dass die Zahl der Bedingungsgleichungen so gross wird, dass eine völlig rationelle Berechnung derselben nach dem im Vorhergehenden entwickelten Verfahren ihres grossen Umfanges wegen praktisch unausführbar wird, und an die Grenze des Unmöglichen streift. In diesem Falle kann man das ganze Netz in so viele Abtheilungen theilen, dass für jede derselben die Ausgleichung gewiss praktisch ausführbar wird. Die erste Abtheilung wird nun ohne Abänderung so ausgeglichen, wie im Vorhergehenden erklärt ist, für alle übrigen Abtheilungen führe man aber die oben erklärte Bedingungsgleichung ein, wodurch bewirkt wird, dass die Anschlussseite denselben Werth bekommt, wie in der vorhergehenden Abtheilung, und da man annehmen muss, dass in

einem so grossen Dreiecksnetze mehrere Grundlinien gemessen worden seien, so wird die Bedingungsgleichung zwischen der Anschlussseite und einer in den vorhergehenden Abtheilungen noch nicht benutzten Grundlinie aufzustellen sein.

Durch dieses Verfahren wird nun zwar nicht in aller Strenge die Summe der mit ihren Gewichten multiplicirten Fehlerquadrate zu einem Minimum gemacht, aber der sich für diese Summe ergebende Werth wird sehr wenig grösser sein, wie das Minimum.

Es liegt hier der Satz zu Grunde, der so häufig in der angewandten Mathematik benutzt wird, nemlich in den Fällen, wo sich der strengen Behandlung einer Aufgabe unübersteigliche Hindernisse entgegen stellen, eine genäherte Auflösung Platz greifen zu lassen.

Uebrigens werden bei dem hier erklärten Verfahren alle vorhandenen trigonometrischen Bedingungsgleichungen vollständig erfüllt, und man kann daher das mit den obigen Modificationen ausgeglichene Dreiecksnetz fernerhin eben so wie jedes andere, völlig strenge ausgeglichene, benutzen.

§. 6. Recapitulation der zur Ausgleichung eines Dreiecksnetzes erforderlichen Vorschriften und Formeln.

133.

Es sind zwar im Vorhergehenden alle Vorschriften und Formeln zum angeführten Zwecke ausführlich abgeleitet und erklärt worden, allein es ist nicht zu vermeiden gewesen, dass sie abgesondert von einander an verschiedenen Stellen sich befinden, da die Erklärungen und Beweise zwischen denselben eingeschaltet werden mussten. Es scheint daher von Nutzen zu sein, diese Vorschriften und Formeln hier neben einander gestellt nochmals anzuführen. Der grösseren Einfachheit wegen, und weil es am häufigsten so angenommen werden darf, werde ich hier annehmen, dass auf jeder Station allen Einstellungen oder Beobachtungen dasselbe Gewicht, welches $= 1$ zu setzen ist, beigelegt werden darf, aber den Fall nicht ausschliessen, dass auf verschiedenen Stationen den einzelnen Beobachtungen ein anderes Gewicht beigelegt werden muss. Sollte auf einer und derselben Station der Fall eintreten, dass verschiedenen Beobachtungen verschiedene Gewichte beigelegt werden müssten,

so bietet diese Abhandlung in ihrem vorhergegangenen Inhalt das Verfahren dar, welches anzuwenden ist.

134.

Allgemeine Vorbereitung der Beobachtungen.

Die einzuführenden Bezeichnungen sollen im Allgemeinen dieselben sein, die im Vorhergehenden bei der Berechnung des Beispiels angewandt worden sind. Es sollen also, um das wiederholte Hinschreiben oft langer Namen zu vermeiden, oder der Unbestimmtheit vorzubeugen, die durch eine Abkürzung dieser Namen entstehen könnte, sowohl die Stationen, wie die auf jeder dieser beobachteten Richtungen mit in Klammern eingeschlossenen arabischen Zahlen bezeichnet werden; letztere sollen auf jeder Station mit der Eins anfangen, und es sollen denselben, wo eine Unterscheidung nothwendig wird, rechts unten als Index die Stationsnummern in kleinerer Schrift angehängt werden. Bei ausgedehnten Triangulationen kann man sich ein für alle Mal ein Verzeichniss anlegen, welches neben den Namen aller Dreieckspunkte, und den auf jeder derselben beobachteten Richtungen, die Stations- und Richtungsnummern enthält, wodurch jedem Irrthum vorgebeugt wird. Man kann auch diese Nummern in die Karte des Dreiecksnetzes eintragen.

Es sollen nun namentlich, wenn r die Richtungs- und s die Stationsnummern bezeichnen, gleichwie im obigen Beispiel,

$(r)_s$ der vorläufig angenommene Werth irgend einer Richtung,

$w(r)_s$ die durch die Ausgleichung auf der Station erhaltene Verbesserung von $(r)_s$, und

$y(r)_s$ das Resultat dieser Ausgleichung

bedeuten, so dass

$$y(r)_s = (r)_s + w(r)_s$$

wird. Im ganzen ersten Theile der Auflösung kann man die Stationsnummer weglassen, und sich begnügen (r), $w(r)$, $y(r)$ zu schreiben, wenn nur die Stationsnummer ein für alle Mal angegeben wird.

135.

Nachdem auf irgend einer Station die Messungen (oder die Beobachtungen der Richtungen) vollendet sind, kann man in Bezug auf diese

schon den ersten Theil der Auflösung unserer Aufgabe, nemlich die Ausgleichung auf dieser Station, ausführen, ohne dass man die Vollendung der Messungen auf den andern Stationen abzuwarten braucht.

Da die Beobachtungen selbst, von Gyrus zu Gyrus, immer so ausgeführt werden müssen, dass verschiedene Punkte des Kreises des Theodoliten in Anspruch genommen werden, so besteht die erste Arbeit darin, dass man zu den Originalbeobachtungen eines jeden Gyrus eine solche constante Zahl addirt, dass die Richtungen nach jedem Gegenstande, der eingeschnitten worden ist, einander nahe gleich werden; es ist zweckmässig diese Constanten ausserdem so zu wählen, dass die Richtungen nahe die Azimuthe der Gegenstände darstellen. Die Azimuthe muss man immer vom Südpunkt des Horizonts nach Westen durch den ganzen Umkreis zählen.

Man theile nun alle beobachteten Gyri je nach den in denselben eingeschnittenen Richtungen derart in Gruppen, dass in jeder dieser dieselben Richtungen ohne Lücken enthalten sind. Die Beobachtungen einer jeden Richtung jeder Gruppe für sich addire man, nehme hierauf eine dem Mittel dieser Summe beiläufig entsprechende Zahl als vorläufigen Werth der Richtung an, und ziehe das entsprechende Vielfache derselben von der Summe der Richtungen ab. Die erhaltenen Unterschiede stelle man für die verschiedenen Gruppen von Gyris tabularisch so zusammen, dass jede Columne die Resultate Einer Gruppe enthält, und die Beobachtungen jeder Richtung, neben dem vorläufig angenommenen Werthe dieser letzteren, eine Zeile bilden.

Unter der Bezeichnung p, $p_{,}$, $p_{,,}$, etc. stelle man jeder Columne die Zahl der Gyri, aus welcher die in derselben enthaltenen Summen bestehen, voran, die nachher die denselben beizulegenden Gewichte sind; auch füge man die arithmetischen Mittel aus den Zahlen jeder Columne hinzu.

Seien σ, σ', σ'', etc. die Summen der einzelnen Beobachtungen der Richtungen der erst in Betracht gezogenen Gruppe von Gyris; $\sigma_{,}$, $\sigma_{,}'$, $\sigma_{,}''$, etc., $\sigma_{,,}$, $\sigma_{,,}'$, $\sigma_{,,}''$, etc. etc. die Summen der weiter in Betracht zu ziehenden Gruppen,

$$\sigma - p\,.(1) = s\,, \quad \sigma' - p\,.(2) = s'\,, \quad \sigma'' - p\,.(3) = s''\,, \text{ etc.}$$
$$\sigma_{,} - p_{,}\,.(1) = s_{,}\,, \quad \sigma'_{,} - p_{,}\,.(2) = s'_{,}\,, \quad \sigma''_{,} - p_{,}\,.(3) = s''_{,}\,, \text{ etc.}$$
$$\sigma_{,,} - p_{,,}\,.(1) = s_{,,}\,, \quad \sigma'_{,,} - p_{,,}\,.(2) = s'_{,,}\,, \quad \sigma''_{,,} - p_{,,}\,.(3) = s''_{,,}\,, \text{ etc.}$$

etc. etc.

$$S = s + s' + s'' + \ldots$$
$$S_{,} = s_{,} + s'_{,} + s''_{,} + \ldots$$
$$S_{,,} = s_{,,} + s'_{,,} + s''_{,,} + \ldots$$
etc.

und

$$M = \frac{S}{m}\,, \quad M' = \frac{S_{,}}{m_{,}}\,, \quad M'' = \frac{S_{,,}}{m_{,,}}\,, \quad \text{etc.}$$

wenn m, $m_{,}$, $m_{,,}$, etc. die Zahl der Richtungen bezeichnen, die in jeder Gruppe eingeschnitten worden sind, dann wird die Tafel den folgenden Inhalt bekommen,

r	Vorl. Werthe.	Anzahl d. Beob. u. die Summen dieser.					
		p	$p_{,}$	$p_{,,}$	etc.	etc.	etc.
(1)	. . .	s	$s_{,}$	$s_{,,}$	etc.	. .	. .
(2)	. . .	s'	$s'_{,}$	$s'_{,,}$	etc.	. .	. .
(3)	. . .	s''	$s''_{,}$	$s''_{,,}$	etc.	. .	. .
etc.	. . .	etc.	etc.	etc.	etc.	. .	. .
		S	$S_{,}$	$S_{,,}$	etc.	. .	. .
		M	$M_{,}$	$M_{,,}$	etc.	. .	. .

wo aber in den verschiedenen Columnen die Stellen derjenigen Summen leer bleiben werden, die den Richtungen angehören, die in der betr. Gruppe von Gyris nicht eingeschnitten worden sind. Beispiele dieser Tafel findet man in dem Art. 84 u. d. f.

Die Summirungen, die hier verlangt werden, müssen sorgfältig ausgeführt werden, aber in Folge der vorangegangenen Vorbereitungen sind sie einfach, da man bei jeder Richtung nur auf die Secunden und deren Bruchtheile Rücksicht zu nehmen braucht, und am häufigsten auch die Zehnersecunden entweder gar nicht, oder höchstens ihre Unterschiede zu beachten nöthig hat. Bei der Bestimmung der vorläufigen Werthe der Richtungen ist nur darauf zu sehen, dass sie ohngefähr dem Mittel der eben genannten Summen entsprechen.

Den im Vorhergehenden enthaltenen Entwickelungen und Erklärungen zufolge sind nun

$$pl = s - M\,, \quad pl' = s' - M\,, \quad pl'' = s'' - M\,, \quad \text{etc.}$$
$$p_{,}l_{,} = s_{,} - M_{,}\,, \quad p_{,}l'_{,} = s'_{,} - M_{,}\,, \quad p_{,}l''_{,} = s''_{,} - M_{,}\,, \quad \text{etc.}$$
$$p_{,,}l_{,,} = s_{,,} - M_{,,}\,, \quad p_{,,}l'_{,,} = s'_{,,} - M_{,,}\,, \quad p_{,,}l''_{,,} = s''_{,,} - M_{,,}\,, \quad \text{etc.}$$
etc. etc.

Diese Unterschiede trage man in eine zweite Tafel ein, die auf entgegengesetzte Weise anzuordnen ist wie die erste, nemlich so, dass jede beobachtete Richtung ihre Columne bekommt, und die Resultate einer jeden Gruppe von Gyris eine Zeile bilden. Jeder Gruppe füge man die schon oben erklärten Gewichte, nebst den P und den Quotienten $\frac{p^2}{P}$ bei, und in ihrem unteren Theile setze man die (lx) und die Q an. Auch versehe man jede Gruppe von Gyris mit seiner laufenden Nummer. Der Inhalt dieser Tafel ist also der folgende,

Nr.	(1)	(2)	(3)	etc.			
1	pl	pl'	pl''	etc.	p	P	$p^2 : P$
2	$p_{,}l_{,}$	$p_{,}l'_{,}$	$p_{,}l''_{,}$	etc.	$p_{,}$	$P_{,}$	$p^2_{,} : P_{,}$
3	$p_{,,}l_{,,}$	$p_{,,}l'_{,,}$	$p_{,,}l''_{,,}$	etc.	$p_{,,}$	$P_{,,}$	$p^2_{,,} : P_{,,}$
etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.
	(lx)	(lx')	(lx'')	etc.			
	Q	Q'	Q''	etc.			

in welcher, wie in der ersten Tafel, die entsprechenden Stellen leer bleiben werden. Auch von dieser Tafel findet man in dem Art. 84 u. d. f. Beispiele.

Dem Vorhergehenden zufolge ist nun

$$(lx) = pl + p_{,}l_{,} + p_{,,}l_{,,} + \ldots$$
$$(lx') = pl' + p_{,}l'_{,} + p_{,,}l'_{,,} + \ldots$$
$$(lx'') = pl'' + p_{,}l''_{,} + p_{,,}l''_{,,} + \ldots$$
etc.

zwischen welchen die Bedingungsgleichung

$$(lx) + (lx') + (lx'') + \ldots = 0$$

stattfindet. Die P, $P_{,}$, etc. bestehen aus dem Produkt des betreffenden p in die Anzahl der in derselben Zeile vorkommenden beobachteten Richtungen, und die Q, Q', etc. sind die Summen der p, für welche in der betreffenden Columne beobachtete Richtungen vorhanden sind. Zur Controle kann hier die Bedingungsgleichung

$$P + P_{,} + P_{,,} + \text{etc.} = Q + Q' + Q'' + \text{etc.}$$

benutzt werden.

136.

Es sind hierauf die folgenden Coefficienten zu berechnen,

(pp) = der Summe der Quotienten $\frac{p^2}{P}$ aller derjenigen Gruppen von Gyris, in welchen die Richtung (1) eingeschnitten worden ist,

(pp') = der Summe der Quotienten $\frac{p^2}{P}$ derjenigen Gruppen, in welchen die Richtungen (1) und (2) beide eingeschnitten worden sind,

(pp'') = der Summe u. s. w. Richtungen (1) und (3) beide u. s. w.

etc.

$(p'p')$ = der Summe u. s. w. Richtung (2) u. s. w.

$(p'p'')$ = der Summe u. s. w. Richtungen (2) und (3) beide u. s. w.

etc.

$(p''p'')$ = der Summe u. s. w. Richtung (3) u. s. w.

etc.

bis alle auf der Station eingeschnittenen Richtungen erschöpft sind. Zur Controle dieser Rechnung dienen die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
(pp) + (pp') + (pp'') + \ldots &= Q \\
(pp') + (p'p') + (p'p'') + \ldots &= Q' \\
(pp'') + (p'p'') + (p''p'') + \ldots &= Q'' \\
\text{etc} \qquad\qquad & \text{etc.}
\end{aligned}
$$

Die allgemeinen Vorbereitungen der Beobachtungen, welche beiden im Vorhergehenden entwickelten Verfahrungsarten gemeinschaftlich sind, können hiemit als beendigt betrachtet werden, und es muss nun jedes Verfahren besonders vorgenommen werden.

137.

Erstes Verfahren.

1) Erster Theil der Auflösung, oder die Ausgleichung auf den Stationen.

α) Wenn auf der Station in jedem Gyrus alle Richtungen eingeschnitten worden sind.

Die allgemeinen, im Vorhergehenden erklärten, Vorbereitungen fallen bis auf die erste derselben weg, die sich darauf beschränkt, dass man zu den Originalbeobachtungen eines jeden Gyrus eine solche con-

stante Zahl addirt, wodurch die Beobachtungen einer jeden Richtung nahe einander gleich werden, und nahe die Azimuthe darstellen. Man nehme hierauf aus den Beobachtungen einer jeden Richtung das arithmetische Mittel; diese Mittel sind ohne Weiteres die mit $y(r)$ zu bezeichnenden Resultate der Ausgleichung auf solchen Stationen. Nennt man ferner die Anzahl der einzelnen Gyri p, so ist das Gewicht

$$p = (1,1) = (2,2,1) = (3,3,2) = \text{etc.}$$

welche Grössen im zweiten Theile der Auflösung gebraucht werden. Es wird hier überdies

$$(ll,n) = 0$$

Wenn auf einer Station nur zwei Richtungen eingeschnitten worden sind, so tritt immer der gegenwärtige Fall ein, der daher im Folgenden nicht betrachtet zu werden braucht.

β) Wenn auf der Station nicht in jedem, oder in keinem, Gyrus alle Richtungen eingeschnitten worden sind, so sind vor Allem alle, in den Artt. 134—136 erklärten, Vorbereitungen auszuführen, und darauf die folgenden Berechnungen vorzunehmen.

a) Wenn auf der Station drei Richtungen eingeschnitten worden sind,

rechne man

$$M = \sqrt{(pp')(pp'')(p'p'')}$$

$$N = \frac{M}{(p'p'')}, \quad N' = \frac{M}{(pp'')}, \quad N'' = \frac{M}{(pp')}$$

$$(1,1) = Q + N^2 - (pp)$$
$$(2,2,1) = Q' + N'^2 - (p'p')$$
$$(3,3,2) = Q'' = N''^2 - (p''p'')$$

zu deren Controle man auch

$$(1,1) = N\Sigma N$$
$$(2,2,1) = N'\Sigma N$$
$$(3,3,2) = N''\Sigma N$$

rechnen kann, wo $\Sigma N = N + N'' + N'''$ ist. Hierauf werden

$$w(1) = \frac{(lx)}{(1,1)}$$
$$w(2) = \frac{(lx')}{(2,2,1)}$$
$$w(3) = \frac{(lx'')}{(3,3,2)}$$

zu deren Controle

$$N \, . \, w(1) + N' \, . \, w(2) + N'' \, . \, w(3) = 0$$

dient. Die Grösse (ll) wird am dienlichsten nach dem folgenden Ausdruck berechnet,

$$\begin{aligned}(ll) &= \frac{(pl)^2 + (pl')^2 + (pl'')^2 + \dots}{p} \\ &+ \frac{(p_{,}l_{,})^2 + (p_{,}l_{,}')^2 + (p_{,}l_{,}'')^2 + \dots}{p_{,}} \\ &+ \frac{(p_{,,}l_{,,})^2 + (p_{,,}l_{,,}')^2 + (p_{,,}l_{,,}'')^2 + \dots}{p_{,,}} \\ &+ \text{etc.}\end{aligned}$$

dessen Anordnung seinen Grund in dem Inhalt der im Art. 135 erklärten zweiten Tafel findet. Endlich wird

$$\begin{aligned}(ll,3) &= (ll) - (lx) \, . \, w(1) - (lx') \, . \, w(2) - (lx'') \, . \, w(3) \\ &= (ll) - \frac{(lx)^2}{(1,1)} - \frac{(lx')^2}{(2,2,1)} - \frac{(lx'')^2}{(3,3,2)}\end{aligned}$$

Ausser den $y(1)$, $y(2)$, $y(3)$ werden auch die Coefficienten

$$(1,1) \, , \quad (2,2,1) \, , \quad (3,3,2)$$

im zweiten Theile der Auflösung gebraucht werden

b) Wenn auf der Station vier Richtungen eingeschnitten worden sind.

Die drei Grössen N, N', N'' werden wie unter *a*) berechnet, und ausserdem

$$N''' = \frac{(pp''')}{N}$$

hierauf

$$\begin{array}{ll} (1,1) = Q + N^2 - (pp) \, , & (2,2,1) = Q' + N'^2 - (p'p') \\ & (2,4,1) = N'N''' - (p'p''') \\ \underline{(1,l) = (lx)} \, , & \underline{(2,l,1) = (lx')} \\ (3,3,2) = Q'' + N''^2 - (p''p'') \, , & (4,4,1) = Q''' + N'''^2 - (p'''p''') \\ (3,4,2) = N''N''' - (p''p''') \, , & \\ (3,l,2) = (lx'') \, , & (4,l,1) = (lx''') \end{array}$$

Zur Controle dienen hier

$$\begin{aligned} (1,1) &= N\Sigma N \\ (2,2,1) + (2,4,1) &= N'\Sigma N \\ (3,3,2) + (3,4,2) &= N''\Sigma N \\ (2,4,1) + (3,4,2) + (4,4,1) &= N'''\Sigma N \end{aligned}$$

wo $\Sigma N = N + N' + N'' + N'''$ ist. (ll) wird wie unter $a)$ berechnet. Ferner

$$\chi' = -\frac{(1,l)}{(1,1)}$$

$$(ll,1) = (ll) + (1,l)\chi'$$

$$\gamma'' = -\frac{(2,4,1)}{(2,2,1)}, \quad \chi'' = -\frac{(2,l,1)}{(2,2,1)}$$

$$(4,4,2) = (4,4,1) + (2,4,1)\gamma''$$

$$(4,l,2) = (4,l,1) + (2,l,1)\gamma''$$

$$(ll,2) = (ll,1) + (2,l,1)\chi''$$

$$\gamma''' = -\frac{(3,4,2)}{(3,3,2)}, \quad \chi''' = -\frac{(3,l,2)}{(3,3,2)}$$

$$(4,4,3) = (4,4,2) + (3,4,2)\gamma'''$$

$$(4,l,3) = (4,l,2) + (3,l,2)\gamma'''$$

$$(ll,3) = (ll,2) + (3,l,2)\chi'''$$

$$\chi^{IV} = -\frac{(4,l,3)}{(4,4,3)}$$

$$(ll,4) = (ll,3) + (4,l,3)\chi^{IV}$$

$$\beta''' = \gamma''$$

worauf

$$\begin{aligned} -w(1) &= \chi' \\ -w(2) &= \chi'' + \chi^{IV}\beta''' \\ -w(3) &= \chi''' + \chi^{IV}\gamma''' \\ -w(4) &= \chi^{IV} \end{aligned}$$

werden. Zur Controle dient hier

$$N \,.\, w(1) + N' \,.\, w(2) + N'' \,.\, w(3) + N''' \,.\, w(4) = 0$$

Im zweiten Theile der Auflösung werden ausser den $y(1)$, etc. nur

$$(1,1)\,, \quad (2,2,1)\,, \quad (3,3,2)\,, \quad (4,4,3)\,, \quad \beta''', \quad \gamma'''$$

gebraucht.

c) Wenn auf der Station fünf Richtungen eingeschnitten worden sind.

Die drei Grössen N, N', N'' werden wieder wie unter a) berechnet, ausserdem

$$N''' = \frac{(pp''')}{N}, \quad N^{IV} = \frac{(pp^{IV})}{N}$$

und hieraur

$$(1,1) = Q + N^2 - (pp) \quad , \quad (2,2,1) = Q' + N'^2 - (p'p')$$
$$(2,4,1) = N'N''' - (p'p''')$$
$$(2,5,1) = N'N^{IV} - (p'p^{IV})$$
$$(1,l) = (lx) \qquad (2,l,1) = (lx')$$
$$(3,3,2) = Q'' + N''^2 - (p''p'') \,, \quad (4,4,1) = Q''' + N'''^2 - (p'''p''')$$
$$(3,4,2) = N''N''' - (p''p''') \quad , \quad (4,5,1) = N'''N^{IV} - (p'''p^{IV})$$
$$(3,5,2) = N''N^{IV} - (p''p^{IV}) \quad , \quad (4,l,1) = (lx''')$$
$$(3,l,2) = (lx'')$$
$$(5,5,1) = Q^{IV} + N^{IV2} - (p^{IV}p^{IV})$$
$$(5,l,1) = (lx^{IV})$$

zu deren Controle die Gleichungen

$$(1,1) = N\Sigma N$$
$$(2,2,1) + (2,4,1) + (2,5,1) = N'\Sigma N$$
$$(3,3,2) + (3,4,2) + (3,5,2) = N''\Sigma N$$
$$(2,4,1) + (3,4,2) + (4,4,1) + (4,5,1) = N'''\Sigma N$$
$$(2,5,1) + (3,5,2) + (4,5,1) + (5,5,1) = N^{IV}\Sigma N$$

dienen, wo $\Sigma N = N + N' + N'' + N''' + N^{IV}$ ist. (ll) wird immer wie unter a) berechnet. Ferner werden

$$\chi' = -\frac{(1,l)}{(1,1)}$$
$$(ll,1) = (ll) + (1,l)\chi'$$

$$\gamma'' = -\frac{(2,4,1)}{(2,2,1)}\,, \quad \delta'' = -\frac{(2,5,1)}{(2,2,1)}\,, \quad \chi'' = -\frac{(2,l,1)}{(2,2,1)}$$
$$(4,4,2) = (4,4,1) + (2,4,1)\gamma''$$
$$(4,5,2) = (4,5,1) + (2,5,1)\gamma''$$
$$(4,l,2) = (4,l,1) + (2,l,1)\gamma''$$
$$(5,5,2) = (5,5,1) + (2,5,1)\delta''$$
$$(5,l,2) = (5,l,1) + (2,l,1)\delta''$$
$$(ll,2) = (ll,1) + (2,l,1)\chi''$$

$$\gamma''' = -\frac{(3,4,2)}{(3,3,2)}\,, \quad \delta''' = -\frac{(3,5,2)}{(3,3,2)}\,, \quad \chi''' = -\frac{(3,l,2)}{(3,3,2)}$$
$$(4,4,3) = (4,4,2) + (3,4,2)\gamma'''$$
$$(4,5,3) = (4,5,2) + (3,5,2)\gamma'''$$
$$(4,l,3) = (4,l,2) + (3,l,2)\gamma'''$$
$$(5,5,3) = (5,5,2) + (3,5,2)\delta'''$$
$$(5,l,3) = (5,l,2) + (3,l,2)\delta'''$$
$$(ll,3) = (ll,2) + (3,l,2)\chi'''$$

$$\delta^{IV} = -\frac{(4,5,3)}{(4,4,3)}\,,\quad \chi^{IV} = -\frac{(4,l,3)}{(4,4,3)}$$

$$\begin{array}{lcl}
(5,5,4) & = & (5,5,3) + (4,5,3)\delta^{IV} \\
(5,l,4) & = & (5,l,3) + (4,l,3)\delta^{IV} \\
\hline
(ll,4) & = & (ll,3) + (4,l,3)\chi^{IV} \\
\hline
\end{array}$$

$$\chi^{V} = -\frac{(5,l,4)}{(5,5,4)}$$

$$\begin{array}{lcl}
(ll,5) & = & (ll,4) + (5,l,4)\chi^{V} \\
\hline
\end{array}$$

$$\beta^{III} = \gamma^{II}\,,\quad \begin{array}{lcl} \beta^{IV} & = & \delta^{II} + \delta^{IV}\beta^{III} \\ \gamma^{IV} & = & \delta^{III} + \delta^{IV}\gamma^{III} \end{array}$$

worauf man

$$\begin{array}{lcl}
-w(1) & = & \chi^{I} \\
-w(2) & = & \chi^{II} + \chi^{IV}\beta^{III} + \chi^{V}\beta^{IV} \\
-w(3) & = & \chi^{III} + \chi^{IV}\gamma^{III} + \chi^{V}\gamma^{IV} \\
-w(4) & = & \chi^{IV} + \chi^{V}\delta^{IV} \\
-w(5) & = & \chi^{V}
\end{array}$$

bekommt, und die Gleichung

$$N \,.\, w(1) + N' \,.\, w(2) + N'' \,.\, w(3) + N''' \,.\, w(4) + N^{IV}\, w(5) = 0$$

zur Controle dient. Ausser den $y(1)$, etc. werden noch die Coefficienten

$$\begin{array}{ccccc}
(1,1)\,, & (2,2,1)\,, & (3,3,2)\,, & (4,4,3)\,, & (5,5,4) \\
\beta^{III}\,, & \gamma^{III}\,, & \beta^{IV}\,, & \gamma^{IV}\,, & \delta^{IV}
\end{array}$$

in dem zweiten Theile der Auflösung gebraucht.

Aus dem Vorhergehenden lässt sich schon vollkommen erkennen, wie verfahren werden muss, wenn auf der Station mehr wie fünf Richtungen eingeschnitten worden sind. Zur deutlicheren Uebersicht will ich jedoch noch die Ausdrücke für die β, γ, etc., die hinzukommen, für zwei Fälle anführen.

d) Wenn auf der Station sechs Richtungen eingeschnitten worden sind,

so kommen zu den vorhergehenden ähnlichen Ausdrücken noch die folgenden hinzu

$$\begin{array}{lcl}
\beta^{V} & = & \varepsilon^{II} + \varepsilon^{IV}\beta^{III} + \varepsilon^{V}\beta^{IV} \\
\gamma^{V} & = & \varepsilon^{III} + \varepsilon^{IV}\gamma^{III} + \varepsilon^{V}\gamma^{IV} \\
\delta^{V} & = & \varepsilon^{IV} + \varepsilon^{V}\delta^{IV}
\end{array}$$

e) Wenn auf der Station sieben Richtungen eingeschnitten worden sind,

so kommen zu den vorhergehenden ähnlichen Ausdrücken noch die folgenden hinzu

$$\begin{aligned} \beta^{vi} &= \zeta'' + \zeta^{iv}\beta''' + \zeta^{v}\beta^{iv} + \zeta^{vi}\beta^{v} \\ \gamma^{vi} &= \zeta''' + \zeta^{iv}\gamma''' + \zeta^{v}\gamma^{iv} + \zeta^{vi}\gamma^{v} \\ \delta^{vi} &= \zeta^{iv} + \zeta^{v}\delta^{iv} + \zeta^{vi}\delta^{v} \\ \varepsilon^{vi} &= \zeta^{v} + \zeta^{vi}\varepsilon^{v} \end{aligned}$$

u. s. w. wenn mehr Richtungen eingeschnitten worden sind.

In Bezug auf die N ist zu bemerken, dass ihre Berechnung unmöglich wird, wenn zufällig eine oder zwei der drei Grössen (pp'), (pp''), $(p'p'')$ Null sind. Aber in diesem Falle kann man durch Aenderung der zuerst angenommenen Reihenfolge der Richtungen immer bewirken, dass die N bestimmbar werden. Auch kann man oftmals dieses dadurch möglich machen, dass man ohne die Reihenfolge der Richtungen zu ändern, die oben mit M bezeichnete Wurzelgrösse aus anderen (pp) bildet*).

Die auf den verschiedenen Stationen erhaltenen Werthe der (ll,n), wo n die Anzahl der auf der Station eingeschnittenen Richtungen bezeichnet, werden addirt, und ihre Summe mit W_0 bezeichnet. Hiebei kann indessen eine Modification eintreten, die im nächsten Artikel erklärt werden wird.

Will man ausserdem noch die Werthe der u, $u_{,}$, $u_{,,}$, etc. kennen lernen, so dienen dazu die Gleichungen (65), die unter den hier stattfindenden Annahmen allgemein ausgedrückt werden können. Bezeichnen wir mit m die laufende Nummer irgend einer der Gruppen von Gyris, und mit $u(m)$, oder schlechtweg $u(m)$ den derselben zukommenden Werth von u, so bekommen wir allgemein

---

*) So hätte man z. B. im Art. 84 ohne die Richtungen (3) und (4) mit einander zu vertauschen

$$M = \sqrt{(pp')(pp''')(p'p''')}$$

und demzufolge

$$\begin{aligned} N &= \frac{M}{(p'p''')}, & N' &= \frac{M}{(pp''')} \\ N'' &= 0, & N''' &= \frac{M}{(pp')} \\ N^{iv} &= \frac{(pp^{iv})}{N}, & N^{v} &= \frac{(pp^{v})}{N} \end{aligned}$$

setzen können, wodurch derselbe Zweck erreicht worden wäre.

$$u(m) = -\frac{p_{m-1}}{P_{m-1}}\Sigma w(r)$$

in welchem Ausdruck aber nur diejenigen $w(r)$ aufgenommen werden dürfen, die in der betr. Gruppe von Gyris wirklich beobachteten Richtungen zukommen. Man kann, wenn man es für nöthig halten sollte, sich dieser Grössen zur Controlirung der, wie oben gezeigt wurde, berechneten Werthe der (ll,n) bedienen, denn man findet aus dem Vorhergehenden leicht, dass auch

$$(ll,n) = \Sigma\Sigma\frac{\left\{p_{m-1}(u(m)+w(r)) - p_{m-1}l_{m-1}^{r-1}\right\}^2}{p_{m-1}}$$

ist, wo das eine Summenzeichen sich auf die auf der Station vorhandenen Gruppen von Gyris, und das andere sich auf die vorhandenen Richtungen bezieht.

138.

Im Art. 133 ist des Falles Erwähnung geschehen, in welchem den Beobachtungen verschiedener Stationen verschiedene Gewichte beigelegt werden müssen; dieser soll jetzt in Betracht gezogen werden.

Wenn auf allen Stationen dasselbe Instrument und dieselben Beobachter, oder gleich gute Instrumente und Beobachter von gleicher Qualität verwendet worden sind, so liegt in der Regel kein Grund vor die Beobachtungen irgend einer Station für mehr oder minder genau zu halten als die der andern Stationen, und man kann allenthalben, wie im Vorhergehenden angegeben ist, das Gewicht jeder einzelnen Beobachtung $= 1$ setzen. Sind dagegen auf verschiedenen Stationen Instrumente oder Beobachter verschiedener Qualität verwendet worden, oder ist beides der Fall gewesen, so sind aus diesem Grunde die Gewichte der Beobachtungen dieser Stationen zu modificiren, und überhaupt die Beobachtungen der verschiedenen Stationen in Bezug auf das ihnen beizulegende Gewicht in verschiedene Gattungen zu theilen. Man kann demungeachtet bei der Ausführung der im Vorhergehenden erklärten Rechnungen auf allen Stationen den einzelnen Beobachtungen das Gewicht $= 1$ beilegen, und die einfachen Aenderungen, die vorzunehmen sind, bis zum Beginn des zweiten Theils der Auflösung verschieben. Um diese Aenderungen zu ermitteln kann man auf die folgende Weise verfahren.

Man muss sich eine möglichst grosse Anzahl von unabhängigen Beobachtungen verschiedener Winkel verschaffen, und diese Beobach-

tungen müssen abtheilungsweise mit denselben Instrumenten und denselben Beobachtern, die zur Triangulation verwendet worden sind, ausgeführt worden sein. Wenn die Triangulation von nicht zu kleiner Ausdehnung ist, so können die bei derselben beobachteten Richtungen zu diesem Zwecke dienen.

Aus den Beobachtungen einer jeden Gattung und eines jeden Winkels nehme man das arithmetische Mittel, ziehe dieses von einer jeden einzelnen Beobachtung ab, und berechne daraus auf bekannte Art das Quadrat des mittleren, zu befürchtenden, Fehlers. Man nehme nemlich die Quadrate der eben genannten Unterschiede, addire diese, und dividire deren Summe mit der Anzahl der Beobachtungen weniger der Anzahl der Unbekannten, welche letztere hier für jeden Winkel $=2$ ist. Aus den so für jede der verschiedenen Gattungen von Beobachtungen erhaltenen Resultaten nehme man wieder die arithmetischen Mittel, worauf die umgekehrten Verhältnisse dieser die Verhältnisse der den verschiedenen Gattungen von Beobachtungen beizulegenden Gewichte geben.

Man habe zum Beispiel bei einer der vorhandenen Gattungen von Beobachtungen für die verschiedenen Winkel die Summen s, s', s'', etc. der Fehlerquadrate erhalten, wobei die Anzahl der Beobachtungen dieser Winkel m, m', m'', etc. seien, dann setze man

$$u = \frac{s}{m-2}, \quad u' = \frac{s'}{m'-2}, \quad u'' = \frac{s''}{m''-2}, \text{ etc.}$$

und

$$\nu = \frac{u+u'+u''+\text{ etc.}}{n}$$

wenn n die Anzahl der u bedeutet.

Für eine andere Gattung der vorhandenen Beobachtungen habe man ebenso erhalten

$$u_{,} = \frac{s_{,}}{m_{,}-2}, \quad u_{,}' = \frac{s_{,}'}{m_{,}'-2}, \quad u_{,}'' = \frac{s_{,}''}{m_{,}''-2}, \text{ etc.}$$

$$\nu_{,} = \frac{u_{,}+u_{,}'+u_{,}''+\text{ etc.}}{n_{,}}$$

für eine dritte Gattung von Beobachtungen

$$u_{,,} = \frac{s_{,,}}{m_{,,}-2}, \quad u_{,,}' = \frac{s_{,,}'}{m_{,,}'-2}, \quad u_{,,}'' = \frac{s_{,,}''}{m_{,,}''-2}, \text{ etc.}$$

$$\nu_{,,} = \frac{u_{,,}-u_{,,}'+u_{,,}''+\text{ etc.}}{n_{,,}}$$

u. s. w. wenn eine grössere Anzahl von Beobachtungsgattungen vorhanden ist. Bezeichnet man nun mit 1, $\pi_{,}$, $\pi_{,,}$, etc. das jeder einzelnen

Beobachtung dieser verschiedenen Beobachtungsgattungen beizulegende Gewicht, so werden

$$\pi_{,} = \frac{\nu}{\nu_{,}}, \quad \pi_{,,} = \frac{\nu}{\nu_{,,}}, \text{ etc.}$$

Je grösser die Anzahl von Beobachtungen ist, die man auf diese Art untersucht hat, desto sicherer wird das vorstehende Resultat.

Ist daher vorläufig bei den Ausgleichungen auf den Stationen, auf jeder derselben das Gewicht der einzelnen Beobachtung $= 1$ gesetzt worden, so bleiben zwar für diejenigen Stationen, auf welchen die Beobachtungsgattung, welcher ν zugehört, vorhanden ist, alle nach den vorangegangenen Ausdrücken berechneten Grössen unverändert, aber auf den Stationen, auf welchen andere Beobachtungsgattungen vorhanden sind, müssen einige der nach dem Vorhergehenden erhaltenen Grössen mit Zahlen $\pi_{,}$, $\pi_{,,}$, etc. multiplicirt werden.

Die Grössen, die dieser Verbesserung bedürfen, sind die Coefficienten

$$(1,1)_s, \ (2,2,1)_s, \ (3,3,2)_s, \text{ etc. und } (ll,n)_s$$

statt deren man in den folgenden Rechnungen die Produkte

$$(1,1)_s . \pi_s, \ (2,2,1)_s . \pi_s, \ (3,3,2)_s . \pi_s, \text{ etc. } (ll,n)_s . \pi_s$$

anwenden muss, wenn π_s denjenigen Werth der $\pi_{,}$, $\pi_{,,}$, etc. bezeichnet, welcher den Beobachtungen der Station s zukommt. Weiter ist aus diesem Grunde keine Aenderung vorzunehmen.

139.

2) Zweiter Theil der Auflösung.

Dieser fängt damit an, dass man die Bedingungsgleichungen, die das Dreiecksnetz darbietet ermittelt und aufstellt; ich verweise dafür auf den Inhalt des Art. 91. In die Bedingungsgleichungen sind die Resultate der Ausgleichungen auf den Stationen, oder mit anderen Worten die Bögen $y(r)_s$ zu substituiren, und die Resultate dieser Substitutionen, nach der Reihenfolge, in welcher man die Bedingungsgleichungen aufgestellt hat, mit

$$F(I), \ F(II), \ F(III), \text{ etc.}$$

zu bezeichnen. Ausserdem sind die Differentiale der Bedingungsgleichungen zu bilden, und die Coefficienten derselben numerisch zu berechnen; ich verweise hiefür auf den Inhalt des Art. 92, und wieder-

hole dabei, dass man die Coefficienten jeder Bedingungsgleichung insgesammt, nebst dem dazu gehörigen F, vor ihrer Anwendung mit jeder beliebigen Zahl multipliciren darf. Man kann diese Eigenschaft dazu benutzen um entweder die Coefficienten der Seitengleichungen, die gewöhnlich ursprünglich grösser sind, als die der Winkelgleichungen, diesen ohngefähr gleich zu machen, oder umgekehrt die Coefficienten der Winkelgleichungen denen der Seitengleichungen ohngefähr gleich zu machen. Diese Coefficienten sind tabularisch zusammen zu stellen, und ihnen die Bezeichnung

$$q(r,I)_s\,,\quad q(r,II)_s\,,\quad q(r,III)_s\,,\ \text{etc.}$$

zu geben, in welcher r die Richtungsnummer, s die Stationsnummer, und I, II, III, etc. die Nummern der Bedingungsgleichungen sind. Der Art. 93 giebt ein Beispiel dieser Zusammenstellung. Es werden ferner

α) Wenn auf der Station alle Richtungen in jedem Gyrus eingeschnitten worden sind,

$$\begin{aligned}
\eta(1,I)_s &= q(1,I)_s \\
\eta(2,I)_s &= q(2,I)_s \\
\eta(3,I)_s &= q(3,I)_s \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q(1,I)_s &= \frac{\eta(1,I)_s}{(1,1)_s} = \frac{q(1,I)_s}{p} \\
Q(2,I)_s &= \frac{\eta(2,I)_s}{(2,2,1)_s} = \frac{q(2,I)_s}{p} \\
Q(3,I)_s &= \frac{\eta(3,I)_s}{(3,3,2)_s} = \frac{q(3,I)_s}{p}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(1,I)_s &= Q(1,I)_s \\
f(2,I)_s &= Q(2,I)_s \\
f(3,I)_s &= Q(3,I)_s \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Diese Ausdrücke sind durch allmählige Vertauschung der I mit den II, III, etc. auf alle Bedingungsgleichungen auszudehnen, auch ist, wie in allen folgenden ähnlichen Ausdrücken, wo nöthig, auf die im vor. Art. erklärten Zahlen π_s Rücksicht zu nehmen.

β) Wenn auf der Station nicht in jedem, oder in keinem, Gyrus alle Richtungen eingeschnitten worden sind.

a) Wenn auf der Station drei Richtungen eingeschnitten worden sind,

$$\eta(1,I)_s = q(1,I)_s$$
$$\eta(2,I)_s = q(2,I)_s$$
$$\eta(3,I)_s = \eta(3,I)_s$$
$$f(1,I)_s = Q(1,I)_s = \frac{\eta(1,I)_s}{(1,1)_s}$$
$$f(2,I)_s = Q(2,I)_s = \frac{\eta(2,I)_s}{(2,2,1)_s}$$
$$f(3,I)_s = Q(3,I)_s = \frac{\eta(3,I)_s}{(3,3,2)_s}$$

die auch, wie eben erklärt, auf alle Bedingungsgleichungen auszudehnen sind.

b) Wenn auf der Station vier Richtungen eingeschnitten worden sind, so werden

$$\eta(1,I)_s = q(1,I)_s$$
$$\eta(2,I)_s = q(2,I)_s$$
$$\eta(3,I)_s = q(3,I)_s$$
$$\eta(4,I)_s = \beta_s'''.q(2,I)_s + \gamma_s'''.q(3,I)_s + q(4,I)_s$$
$$Q(1,I)_s = \frac{\eta(1,I)_s}{(1,1)_s}, \quad Q(2,I)_s = \frac{\eta(2,I)_s}{(2,2,1)_s}$$
$$Q(3,I)_s = \frac{\eta(3,I)_s}{(3,3,2)_s}, \quad Q(4,I)_s = \frac{\eta(4,I)_s}{(4,4,3)_s}$$
$$f(1,I)_s = Q(1,I)_s$$
$$f(2,I)_s = Q(2,I)_s + \beta_s'''.Q(4,I)_s$$
$$f(3,I)_s = Q(3,I)_s + \gamma_s'''.Q(4,I)_s$$
$$f(4,I)_s = Q(4,I)_s$$

die auch auf alle Bedingungsgleichungen auszudehnen sind.

c) Wenn auf der Station fünf Richtungen eingeschnitten worden sind, so kommt zu den unter *b*) angegebenen, mit $\eta(r,I)_s$ bezeichneten Grössen hinzu,

$$\eta(5,I)_s = \beta_s^{IV}.q(2,I)_s + \gamma_s^{IV}.q(3,I)_s + \delta_s^{IV}.q(4,I)_s + q(5,I)_s$$

zu den $Q(r,I)_s$ kommt hinzu

$$Q(5,I)_s = \frac{\eta(5,I)_s}{(5,5,4)_s}$$

und die $f(r,I)_s$ werden nach den folgenden Ausdrücken berechnet,

$$f(1,I)_s = Q(1,I)_s$$
$$f(2,I)_s = Q(2,I)_s + \beta_s'''.Q(4,I)_s + \beta_s^{IV}.Q(5,I)_s$$
$$f(3,I)_s = Q(3,I)_s + \gamma_s'''.Q(4,I)_s + \gamma_s^{IV}.Q(5,I)_s$$
$$f(4,I)_s = Q(4,I)_s + \delta_s^{IV}.Q(5,I)_s$$
$$f(5,I)_s = Q(5,I)_s$$

die selbstverständlich auch auf alle Bedingungsgleichungen ausgedehnt werden müssen. Man erkennt hieraus vollkommen, wie zu verfahren ist, wenn auf der Station mehr wie fünf Richtungen eingeschnitten worden sind.

Auch die numerischen Werthe aller vorstehenden Hülfsgrössen sind zur Erlangung einer klaren Uebersicht tabularisch aufzustellen, wie oben am Beispiel gezeigt worden ist.

140.

Die Berechnung der Coefficienten der Endgleichungen, die nun an die Reihe kommt, kann auf viererlei Weise ausgeführt werden. Bezeichnet man diese Coefficienten mit (I,I), (I,II), etc. (II,II), etc. etc., wo die römischen Zahlen sich wieder auf die Bedingungsgleichungen beziehen, so werden erstens

$$(I,I) = \Sigma\{Q(1,I)_s \,.\, \eta(1,I)_s + Q(2,I)_s \,.\, \eta(2,I)_s + Q(3,I)_s \,.\, \eta(3,I)_s + \ldots\}$$
$$(I,II) = \Sigma\{Q(1,II)_s \,.\, \eta(1,I)_s + Q(2,II)_s \,.\, \eta(2,I)_s + Q(3,II)_s \,.\, \eta(3,I)_s + \ldots\}$$
$$(I,III) = \Sigma\{Q(1,III)_s \,.\, \eta(1,I)_s + Q(2,III)_s \,.\, \eta(2,I)_s + Q(3,III)_s \,.\, \eta(3,I)_s + \ldots\}$$

etc. etc.

$$(II,II) = \Sigma\{Q(1,II)_s \,.\, \eta(1,II)_s + Q(2,II)_s \,.\, \eta(2,II)_s + Q(3,II)_s \,.\, \eta(3,II)_s + \ldots\}$$
$$(II,III) = \Sigma\{Q(1,III)_s \,.\, \eta(1,II)_s + Q(2,III)_s \,.\, \eta(2,II)_s + Q(3,III)_s \,.\, \eta(3,II)_s + \ldots\}$$

etc. etc.

$$(III,III) = \Sigma\{Q(1,III)_s \,.\, \eta(1,III)_s + Q(2,III)_s \,.\, \eta(2,III)_s + Q(3,III)_s \,.\, \eta(3,III)_s + \ldots\}$$

etc. etc.

etc. etc.

bis alle Bedingungsgleichungen erschöpft sind. Die zweite Art diese Coefficienten zu berechnen ergiebt sich aus der ersten, wenn man darin die Q und die η mit einander vertauscht. Rechnet man diese Coefficienten auf diese beiden Arten, so wird dadurch nichts weiter controlirt, wie die Divisionen, durch welche man die Q erhält. Die dritte Berechnungsart geschieht durch die folgenden Ausdrücke,

$$(I,I) = \Sigma\{f(1,I)_s \,.\, q(1,I)_s + f(2,I)_s \,.\, q(2,I)_s + f(3,I)_s \,.\, q(3,I)_s + \ldots\}$$
$$(I,II) = \Sigma\{f(1,I)_s \,.\, q(1,II)_s + f(2,I)_s \,.\, q(2,II)_s + f(3,I)_s \,.\, q(3,II)_s + \ldots\}$$
$$(I,III) = \Sigma\{f(1,I)_s \,.\, q(1,III)_s + f(2,I)_s \,.\, q(2,III)_s + f(3,I)_s \,.\, q(3,III)_s + \ldots\}$$

etc. etc.

$$(II,II) = \Sigma\{f(1,II)_s \;.q(1,II)_s + f(2,II)_s \;.q(2,II)_s + f(3,II)_s \;.q(3,II)_s + \ldots\}$$
$$(II,III) = \Sigma\{f(1,II)_s \;.q(1,III)_s + f(2,II)_s \;.q(2,III)_s + f(3,II)_s \;.q(3,III)_s + \ldots\}$$
etc. etc.
$$(III,III) = \Sigma\{f(1,III)_s.q(1,III)_s + f(2,III)_s.q(2,III)_s + f(3,III)_s.q(3,III)_s + \ldots\}$$
etc. etc.
etc. etc.

und die vierte Art erhält man durch die Vertauschung der f und der q mit einander in den vorstehenden Ausdrücken. Rechnet man diese Coefficienten beides durch die erste und die dritte Art, so werden dadurch nicht blos diese selbst, sondern auch alle Hülfsgrössen des vor. Art. controlirt.

Wie man sieht haben die Ausdrücke für alle hier erforderlichen Grössen die Eigenschaft, dass sie stationsweise berechnet und aufgestellt werden können. Die Grössen des vor. Art. bleiben in Bezug auf die einzelnen Stationen von einander abgesondert, für die Coefficienten dieses Art. müssen die Resultate, die jede Station liefert, addirt werden, wie das Summenzeichen Σ anzeigt.

141.

Die Gleichungen, denen die Coefficienten des vor. Art. angehören, sind, wenn die Unbekannten derselben mit (I), (II), (III), etc. bezeichnet werden, die folgenden,

$$(I,I)(I) + (I,II)(II) + (I,III)(III) + \ldots = F(I)$$
$$(I,II)(I) + (II,II)(II) + (II,III)(III) + \ldots = F(II)$$
$$(I,III)(I) + (II,III)(II) + (III,III)(III) + \ldots = F(III)$$
etc. etc.

und ihre Anzahl ist der Anzahl der Bedingungsgleichungen gleich. Ehe wir an ihre Auflösung gehen ist eine wesentliche Bemerkung einzuschalten.

In jedem Dreiecksnetze von einiger Ausdehnung wird sich ereignen, dass eine Anzahl der Coefficienten der vorstehenden Endgleichungen gleich Null werden, und je grösser das Dreiecksnetz ist, desto mehr wird dieses der Fall sein. Als Folge davon können in diesen Gleichungen mehr oder minder grosse Lücken eintreten, so nemlich, dass in der einen und der andern derselben eine Reihe von aufeinander folgenden Coefficienten Null werden, und hierauf wieder einige vorkommen, die

nicht Null sind. In Bezug auf die Richtigkeit der Auflösung hat dieser Umstand nun nicht den mindesten Einfluss, aber man kann sich desselben bedienen, um die Arbeit, die die Auflösung erfordert, abzukürzen. Zu dem Ende ist nichts weiter zu thun, wie die Reihenfolge, in welcher man die Bedingungsgleichungen des Dreiecksnetzes zuerst aufgestellt hat, so zu ändern, dass die Coefficienten, die nicht Null werden, möglichst nach vorne geschoben werden, so dass sie vom ersten anfangend, eine möglichst ununterbrochene Reihe bilden. Es wird hiedurch nicht blos die Auflösung dieser Gleichungen, oder die Ermittelung der Werthe der Unbekannten derselben, sondern auch die Berechnung der Gewichte möglichst abgekürzt.

Wenn es sich nun nur um die Ermittelung der Unbekannten handelt, so braucht man die Nummern, die den Bedingungsgleichungen anfänglich gegeben worden sind, nicht zu ändern, will man aber auch die Gewichte berechnen, so thut man wohl die Nummern der Bedingungsgleichungen so zu ändern, dass sie nach der beschriebenen Versetzung wieder die fortlaufende Zahlenreihe *I*, *II*, *III*, etc. bilden. Ohne diese Aenderung würde man sich leicht in den Gliedern der Ausdrücke der Gewichte, die aufzunehmen sind, irren können. Dass mit dieser Aenderung der Numerirung der Bedingungsgleichungen auch die entsprechende Aenderung in der Bezeichnung der Unbekannten (Numerirung dieser) und der Grössen des vorvor. Art. eintreten muss, versteht sich von selbst.

142.

Die Auflösung der Endgleichungen des vor. Art. ist die bekannte, allein da die im Verlaufe dieser Abhandlung eingeführten Zwischengrössen derselben bei der Berechnung der Gewichte wieder gebraucht werden, so wird es nöthig, die in den Artt. 46 u. 49 gegebene Auflösung in dieser Recapitulation, in den hier eingeführten Bezeichnungen ausgedrückt, mit aufzunehmen. Zu berechnen sind

$$(2)_1 = -\frac{(I,II)}{(I,I)},\quad (3)_1 = -\frac{(I,III)}{(I,I)},\quad (4)_1 = -\frac{(I,IV)}{(I,I)},\quad \ldots\quad \varphi_1 = +\frac{F(I)}{(I,I)}$$

$$\begin{aligned}(II,II,1) &= (II,II) + (I,II)(2)_1\\ (II,III,1) &= (II,III) + (I,III)(2)_1\\ (II,IV,1) &= (II,IV) + (I,IV)(2)_1\\ &\text{etc.}\\ F(II,1) &= F(II) + F(I)(2)_1\end{aligned}$$

$$(III,III,1) = (III,III) + (I,III)(3)_1$$
$$(III,IV,1) = (III,IV) + (I,IV)(3)_1$$
etc.
$$F(III,1) = F(III) + F(I)(3)_1$$

$$(IV,IV,1) = (IV,IV) + (I,IV)(4)_1$$
etc.
$$F(IV,1) = F(IV) + F(I)(4)_1$$

---

etc. bis
$$R_1 = F(I)\varphi_1$$

$$(3)_2 = -\frac{(II,III,1)}{(II,II,1)}, \quad (4)_2 = -\frac{(II,IV,1)}{(II,II,1)}, \ldots \quad \varphi_2 = +\frac{F(II,1)}{(II,II,1)}$$
$$(III,III,2) = (III,III,1) + (II,III,1)(3)_2$$
$$(III,IV,2) = (III,IV,1) + (II,IV,1)(3)_2$$
etc.
$$F(III,2) = F(III,1) + F(II,1)(3)_2$$

$$(IV,IV,2) = (IV,IV,1) + (II,IV,1)(4)_2$$
etc.
$$F(IV,2) = F(IV,1) + F(II,1)(4)_2$$

---

etc. bis
$$R_2 = R_1 + F(II,1)\varphi_2$$

$$(4)_3 = -\frac{(III,IV,2)}{(III,III,2)}, \ldots \quad \varphi_3 = +\frac{F(III,2)}{(III,III,2)}$$
$$(IV,IV,3) = (IV,IV,2) + (III,IV,2)(4)_3$$
etc.
$$F(IV,3) = F(IV,2) + F(III,2)(4)_3$$

---

etc. bis
$$R_3 = R_2 + F(III,2)\varphi_3$$

$$\ldots\ldots \quad \varphi_4 = +\frac{F(IV,3)}{(IV,IV,3)}$$
etc. bis
$$R_4 = R_3 + F(IV,3)\varphi_4$$

---

etc. bis F_q

wenn q die Anzahl der Endgleichungen bezeichnet.

Diese Coefficienten habe ich so angesetzt, wie ich die Berechnung derselben auszuführen pflege, und die mir die einfachste Weise zu sein scheint. Allein man kann diesen Ausdrücken dadurch, dass man die

Grössen $(III,III,1)$, $(III,IV,1)$, etc., die nur als Hülfsgrössen zur Berechnung derjenigen Coefficienten, die später gebraucht werden, dienen, eliminirt, scheinbar eine kürzere Form geben, die obgleich sie bei der numerischen Rechnung keinen Vortheil gewährt, doch die Uebersicht, namentlich wenn von den ursprünglichen Coefficienten (I,II), (I,III), etc. (II,III), etc. etc. eine Anzahl gleich Null sind, erleichtert. Diese Form ist die folgende, in welcher alle Coefficienten für fünf Gleichungen vollständig ausgeschrieben worden sind, und die weggelassenen etc. Zeichen leicht ergänzt werden können.

$$\begin{aligned}
(II,II,1) &= (II,II) + (I,II)(2)_1 \\
\hline
(II,III,1) &= (II,III) + (I,III)(2)_1 \\
(III,III,2) &= (III,III) + (I,III)(3)_1 + (II,III,1)(3)_2 \\
\hline
(II,IV,1) &= (II,IV) + (I,IV)(2)_1 \\
(III,IV,2) &= (III,IV) + (I,IV)(3)_1 + (II,IV,1)(3)_2 \\
(IV,IV,3) &= (IV,IV) + (I,IV)(4)_1 + (II,IV,1)(4)_2 + (III,IV,2)(4)_3 \\
\hline
(II,V,1) &= (II,V) + (I,V)(2)_1 \\
(III,V,2) &= (III,V) + (I,V)(3)_1 + (II,V,1)(3)_2 \\
(IV,V,3) &= (IV,V) + (I,V)(4)_1 + (II,V,1)(4)_2 + (III,V,2)(4)_3 \\
(V,V,4) &= (V,V) + (I,V)(5)_1 + (II,V,1)(5)_2 + (III,V,2)(5)_3 + (IV,V,3)(5)_4 \\
\hline
F(II,1) &= F(II) + F(I)(2)_1 \\
F(III,2) &= F(III) + F(I)(3)_1 + F(II,1)(3)_2 \\
F(IV,3) &= F(IV) + F(I)(4)_1 + F(II,1)(4)_2 + F(III,2)(4)_3 \\
F(V,4) &= F(V) + F(I)(5)_1 + F(II,1)(5)_2 + F(III,2)(5)_3 + F(IV,3)(5)_4 \\
R_5 &= F(I)\varphi_1 + F(II,1)\varphi_2 + F(III,2)\varphi_3 + F(IV,3)\varphi_4 + F(V,4)\varphi_5 \\
\hline
\end{aligned}$$

Es wird nun zunächst die vollständige Summe der mit ihren Gewichten multiplicirten Quadrate der übrig bleibenden Fehler, wenn sie mit W bezeichnet wird,

$$W = W_0 + R_q$$

wo W_0 die Summe ist, deren Berechnung im Art. 137, und bez. im Art. 138 gezeigt wurde, und q wieder die Anzahl der Bedingungsgleichungen bedeutet. Die obigen Endgleichungen sind ferner durch die obigen Rechnungen in die folgenden verwandelt worden,

$$\begin{aligned}
(I,I)(I) + (I,II)(II) + (I,III)(III) + \ldots &= F(I) \\
(II,II,1)(II) + (II,III,1)(III) + \ldots &= F(II,1) \\
(III,III,2)(III) + \ldots &= F(III,2) \\
\text{etc.} \qquad & \qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

deren Auflösung durch die folgenden Ausdrücke bewirkt wird, die hier auch für fünf Gleichungen vollständig ausgeschrieben worden sind,

$$
\begin{aligned}
(I)_1 &= \varphi_1 + \varphi_5.(5)_1 \\
(II)_1 &= \varphi_2 + \varphi_5.(5)_2 \\
(III)_1 &= \varphi_3 + \varphi_5.(5)_3 \\
(IV)_1 &= \varphi_4 + \varphi_5.(5)_4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(I)_2 &= (I)_1 + (IV)_1.(4)_1 \\
(II)_2 &= (II)_1 + (IV)_1.(4)_2 \\
(III)_2 &= (III)_1 + (IV)_1.(4)_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(I)_3 &= (I)_2 + (III)_2.(3)_1 \\
(II)_3 &= (II)_2 + (III)_2.(3)_2
\end{aligned}
$$

$$
(I)_4 = (I)_3 + (II)_3.(2)_1
$$

$$
\begin{aligned}
(I) &= (I)_4 \\
(II) &= (II)_3 \\
(III) &= (III)_2 \\
(IV) &= (IV)_1 \\
(V) &= \varphi_5
\end{aligned}
$$

und leicht zu erkennen geben, wie zu verfahren ist, wenn mehr wie fünf Gleichungen vorhanden sind.

Man kann die richtige Ausführung der numerischen Auflösung dadurch prüfen, dass man die erhaltenen Werthe der Unbekannten (I), (II), (III), etc. in die ursprünglichen Endgleichungen substituirt, die dadurch erfüllt werden müssen.

Schliesslich bekommt man die $z(r)_s$ durch den folgenden allgemeinen Ausdruck,

$$z(r)_s = f(r,I)_s.(I) + f(r,II)_s.(II) + f(r,III)_s.(III) + \dots$$

und den wahrscheinlichsten Werth der Richtungen $x(r)_s$ durch den folgenden,

$$x(r)_s = y(r)_s - z(r)_s$$

womit die Auflösung der Aufgabe beendigt ist.

Eine umfassende Controle des ganzen zweiten Theils der Auflösung entspringt aus der Eigenschaft, dass die $z(r)_s$, wenn sie mit umgekehrtem Zeichen statt der $\delta x(r)_s$ in die Bedingungsgleichungen substituirt werden, diesen Gnüge leisten müssen. Nur die Differentialquotienten

$q(r,I)_s$, $q(r,II)_s$, etc. bleiben dadurch uncontrolirt, von deren Richtigkeit man sich daher auf andere Art überzeugen muss.

Will man ausserdem auch die wahrscheinlichsten Werthe der $u(m)_s$ kennen lernen, so dient dazu der Ausdruck

$$u(m)_s = \frac{p_{m-1}}{P_{m-1}} \Sigma(z(m)_s - w(r)_s)$$

in welchem aber nur diejenigen $z(m)_s$ und $w(r)_s$ aufgenommen werden dürfen, die in der m^{ten} Gruppe von Gyris wirklich beobachtet worden sind. Durch Zuziehung dieser Werthe der $u(m)_s$ kann man auf ähnliche Art, wie im Art. 137 in Bezug auf die Ausgleichungen auf den Stationen gezeigt wurde, den wie oben berechneten Werth von W einer Controle unterwerfen, wenn man dieses für nöthig halten sollte.

143.

3) Berechnung des Gewichts irgend einer bestimmten Function der Richtungen.

Jeder bestimmten Function der Richtungen kommt ein bestimmtes Gewicht zu, welches durch die unten folgenden Ausdrücke berechnet werden kann. Unter den Functionen der Richtungen, deren Gewichte verlangt werden können, sind vorzugsweise beliebige Winkel und Seiten des Dreiecksnetzes zu verstehen, und diese können zwischen irgend zwei beliebigen Eckpunkten des Netzes gedacht werden; auch kann es sich ereignen, dass die Gewichte einiger der Aggregate $u(m)_s + x(r)_s$ verlangt werden. Die Winkel sowohl wie diese Aggregate sind an sich linearische Functionen der Richtungen, und es sind daher in solchen Fällen in dieser Beziehung keine Vorbereitungen zu treffen, aber da die Seiten keine linearischen Functionen der Richtungen sind, so muss aus dem betreffenden Ausdruck die Differentialgleichung zwischen der Veränderung der Seite und den Veränderungen der sie bestimmenden Richtungen abgeleitet, und die Coefficienten dieser müssen der ferneren Rechnung unterworfen werden. Für die Berechnung dieser Coefficienten verweise ich auf den Art. 103, wo sie ausführlich erklärt worden ist. Bezeichnet man nun allgemein die Veränderung der Seite, oder des Winkels, oder des Aggregats, wie oben, mit Ω, die unbestimmten Aenderungen der in Betracht kommenden Richtungen mit $\delta x(r)_s$, und die Coefficienten dieser Veränderungen mit $k(r)_s$, so ist der allgemeine Ausdruck für Ω,

$$\Omega = \Sigma\Sigma k(r)_s . \delta x(r)_s$$

wo das eine Summenzeichen sich auf r, und das andere sich auf s bezieht, da sehr wohl die Richtungen von mehreren Stationen in Betracht kommen können.

α) Wenn auf einer oder mehreren der in Betracht kommenden Stationen in jedem Gyrus alle Richtungen eingeschnitten worden sind, so setze man für diese überhaupt

$$(M,r)_s = k(r)_s, \quad Q(M,r)_s = \frac{k(r)_s}{p}$$

β) Wenn auf den in Betracht kommenden Stationen sich solche befinden, auf welchen nicht in jedem, oder in keinem, Gyrus alle Richtungen eingeschnitten worden sind, und zwar

a) Wenn drei Richtungen eingeschnitten worden sind, so sind zu setzen,

$$(M,1)_s = k(1)_s$$
$$(M,2)_s = k(2)_s$$
$$(M,3)_s = k(3)_s$$

b) Wenn vier Richtungen eingeschnitten worden sind, so sind zu setzen und zu berechnen,

$$(M,1)_s = k(1)_s$$
$$(M,2)_s = k(2)_s$$
$$(M,3)_s = k(3)_s$$
$$(M,4)_s = \beta_s''' . k(2)_s + \gamma_s''' . k(3)_s + k(4)_s$$

c) Wenn fünf Richtungen eingeschnitten sind, so kommt zu den unter *b*) angeführten Grössen noch die folgende hinzu,

$$(M,5)_s = \beta_s^{IV} . k(2)_s + \gamma_s^{IV} . k(3)_s + \delta_s^{IV} . k(4)_s + k(5)_s$$

u. s. w. wenn Stationen in Betracht kommen, auf welchen mehr wie fünf Richtungen eingeschnitten worden sind. Setzt man hierauf zur Abkürzung, die unter α) ähnlich bezeichneten Grössen wo nöthig eingeschlossen,

$$Q(M,1)_s = \frac{(M,1)_s}{(1,1)_s}, \quad Q(M,2)_s = \frac{(M,2)_s}{(2,2,1)_s}, \quad Q(M,3)_s = \frac{(M,3)_s}{(3,3,2)_s}, \text{ etc.}$$

so wird sogleich

$$R = \Sigma\{Q(M,1)_s . (M,1)_s + Q(M,2)_s . (M,2)_s + Q(M,3)_s . (M,3)_s + \ldots\}$$

womit der erste Theil des gesuchten Gewichts gegeben ist. Um den zweiten Theil desselben zu erhalten, sind zuerst zu berechnen,

$$(I,M) = \Sigma\{Q(M,1)_s.\eta(1,I)_s + Q(M,2)_s.\eta(2,I)_s + Q(M,3)_s.\eta(3,I)_s + \ldots\}$$
$$(II,M) = \Sigma\{Q(M,1)_s.\eta(1,II)_s + Q(M,2)_s.\eta(2,II)_s + Q(M,3)_s.\eta(3,II)_s + \ldots\}$$
$$(III,M) = \Sigma\{Q(M,1)_s.\eta(1,III)_s + Q(M,2)_s.\eta(2,III)_s + Q(M,3)_s.\eta(3,III)_s + \ldots\}$$

u. s. w. bis alle Bedingungsgleichungen des Dreiecksnetzes erschöpft sind. Aus den vorstehenden Grössen ergeben sich die folgenden,

$$\begin{array}{lcll}
(II,M,1) & = & (II,M) & + (I,M)(2)_1 \\
(III,M,1) & = & (III,M) & + (I,M)(3)_1 \\
(IV,M,1) & = & (IV,M) & + (I,M)(4)_1 \\
\text{etc.} & & & \text{etc.} \\
(III,M,2) & = & (III,M,1) & + (II,M,1)(3)_2 \\
(IV,M,2) & = & (IV,M,1) & + (II,M,1)(4)_2 \\
\text{etc.} & & & \text{etc.} \\
(IV,M,3) & = & (IV,M,2) & + (III,M,2)(4)_3 \\
\text{etc.} & & & \text{etc.} \\
\text{etc.} & & & \text{etc.}
\end{array}$$

statt deren man sich auch der folgenden Ausdrücke bedienen kann,

$$\begin{array}{lcl}
(II,M,1) & = & (II,M) + (I,M)(2)_1 \\
(III,M,2) & = & (III,M) + (I,M)(3)_1 + (II,M,1)(3)_2 \\
(IV,M,3) & = & (IV,M) + (I,M)(4)_1 + (II,M,1)(4)_2 + (III,M,2)(4)_3 \\
& \text{etc.} & \qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{array}$$

Nachdem man durch das eine oder das andere dieser beiden Systeme von Gleichungen die Grössen linker Hand berechnet hat, ergiebt sich

$$S = \frac{(I,M)^2}{(I,I)} + \frac{(II,M,1)^2}{(II,II,1)} + \frac{(III,M,2)^2}{(III,III,2)} + \frac{(IV,M,3)^2}{(IV,IV,3)} + \ldots$$

und das gesuchte Gewicht P wird

$$P = \frac{1}{R-S}$$

In Bezug auf die Berechnung der Hülfsgrössen $(II,M,1)$, $(III,M,2)$, etc. aus den (I,M), (II,M), (III,M), etc. kann zu mehrerer Deutlichkeit bemerkt werden, dass sie genau dieselbe ist wie die, wodurch die Grössen $F(II,1)$, $F(III,2)$, etc. der Endgleichungen im Art. 142 aus den $F(I)$, $F(II)$, $F(III)$, etc. berechnet wurden, wobei die Hülfsgrössen $(2)_1$, $(3)_1$, etc. $(3)_2$, etc. etc. unverändert dieselben bleiben.

144.

Zweites Verfahren.

Da dieses Verfahren, dessen Erklärung im Art. 108 anfängt, sich nur wenig vom ersten unterscheidet, so kann ich mich bei der Aufstellung der anzuwendenden Ausdrücke kurz fassen. Der Hauptunterschied zwischen den beiden Verfahren besteht darin, dass bei dem gegenwärtig in Rede stehenden auf jeder Station die Richtung, die man als die erste bezeichnet hat, gänzlich aus der Rechnung weggelassen wird, und statt dessen die Unterschiede zwischen den übrigen Richtungen und dieser eintreten. Eine Folge davon ist, dass der dieser ersten Richtung bei der Bildung der Stationstäfelchen beigelegte beiläufige Werth zum definitiven wird, oder dass für jeden Werth von s

$$x(1)_s = y(1)_s = (1)_s\,, \text{ und } w(1)_s = z(1)_s = 0$$

werden. Eine andere Folge davon ist, dass man die Verbesserungen der genannten Unterschiede der Richtungen so betrachten kann, als wären sie die Verbesserungen dieser Richtungen selbst, und also überhaupt

$$(r)_s\,,\qquad w(r)_s\,,\qquad y(r)_s\,,\qquad z(r)_s\,,\qquad x(r)_s\,,$$

statt

$$(r)_s-(1)_s\,,\; w(r)_s-w(1)_s\,,\; y(r)_s-y(1)_s\,,\; z(r)_s-z(1)_s\,,\; x(r)_s-x(1)_s\,,$$

schreiben darf.

Dass die Vorbereitungen der Beobachtungen, die in den Artt. 134—136 erklärt wurden, gegenwärtig dieselben sind, wurde schon dort angeführt, aber auch die Aenderungen der $(2,2,1)_s$, $(3,3,2)_s$, etc. $(ll,n)_s$, wenn auf verschiedenen Stationen verschiedene Gattungen von Beobachtungen angenommen werden müssen, bleiben dieselben, die im Art. 138 erklärt wurden; es braucht also in den folgenden Zusammenstellungen darauf keine Rücksicht genommen zu werden, sondern es kann auf diese angezogenen Artikel verwiesen werden.

145.

1) Erster Theil der Auflösung, oder die Ausgleichung auf den Stationen.

α) Wenn auf der Station in jedem Gyrus alle Richtungen eingeschnitten worden sind.

Die Vorbereitung ist ganz dieselbe als beim ersten Verfahren in diesem speciellen Falle, und die Werthe der $y(r)$ sind wieder den arith-

metischen Mitteln aus den Beobachtungen der einzelnen Gyri gleich. Auch wird hier wieder

$$(ll,n) = 0$$

wenn wie früher n die Anzahl aller eingeschnittenen Richtungen bezeichnet. Aber die übrigen Abkürzungen, die das erste Verfahren darbietet, fallen hier weg. Die Gleichungen, die der erste Theil der Auflösung enthält sind zu bilden, und aufzulösen. Nur werden diese Gleichungen in dem hier betrachteten Falle einfacher, wie ausserdem. Nennt man wie früher, das Gewicht der einzigen Gruppe von Gyris, die jetzt auf der Station vorhanden ist, p, so werden die aufzulösenden Gleichungen

$$\begin{aligned} p\tfrac{n-1}{n}w(2) - \tfrac{p}{n}w(3) - \tfrac{p}{n}w(4) - \text{etc.} &= 0 \\ -\tfrac{p}{n}w(2) + p\tfrac{n-1}{n}w(3) - \tfrac{p}{n}w(4) - \text{etc.} &= 0 \\ -\tfrac{p}{n}w(2) - \tfrac{p}{n}w(3) + p\tfrac{n-1}{n}w(4) - \text{etc.} &= 0 \\ \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} & \end{aligned}$$

deren Anzahl $n-1$ ist*).

Die Werthe der Unbekannten $w(2)$, $w(3)$, etc., die diese Gleichungen geben, werden zwar Null, aber die Werthe der Coefficienten

$$(2,2,1),\ (3,3,2),\ \text{etc. } \beta'',\ \beta''',\ \gamma''',\ \text{etc. etc.}$$

die aus der Auflösung hervorgehen, treten im zweiten Theil der Auflösung unserer Aufgabe eben so ein, wie in den unten folgenden Fällen. Man findet leicht, dass die analytischen Ausdrücke dieser Coefficienten im gegenwärtigen Falle die folgenden sind,

$$\begin{aligned} (2,2,1) &= p\tfrac{n-1}{n} \\ (3,3,2) &= p\tfrac{n-2}{n-1} \\ (4,4,3) &= p\tfrac{n-3}{n-2} \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

*) Man bekommt nemlich hier

$$Q' = Q'' = Q''' = \text{etc.} = p$$
$$(p'p') = (p'p'') = \text{etc.} = (p''p'') = \text{etc.} = \text{etc.} = \tfrac{p}{n}$$
$$(lx') = (lx'') = \text{etc.} = 0$$

und daher zufolge des Art. 108

$$(2,2) = (3,3) = \text{etc.} = (2,2,1) = (3,3,1) = \text{etc.} = p\tfrac{n-1}{n}$$
$$(2,3) = (2,3,1) = \text{etc.} = \text{etc.} = -\tfrac{p}{n}$$

$$\beta'' = \frac{1}{n-1}$$
$$\beta''' = \gamma''' = \frac{1}{n-2}$$
$$\beta^{iv} = \gamma^{iv} = \delta^{iv} = \frac{1}{n-3}$$
etc.

die für jeden Werth von n gelten*).

β) Wenn auf der Station nicht in jedem Gyrus, oder in keinem, alle Richtungen eingeschnitten worden sind,

so sind alle im Vorhergehenden a. a. O. erklärten Vorbereitungen eben so auszuführen wie beim ersten Verfahren, und darauf die folgenden Berechnungen vorzunehmen, die der Zahl der überhaupt eingeschnitte-

*) Ich führe noch an, dass die Unbekannten der obigen Gleichungen, wenn man auf der rechten Seite derselben bez. m', m'', m''', etc. statt Null schreibt, die folgenden einfachen Ausdrücke haben,

$$w(2) = \frac{2m'+m''+m'''+\ldots}{p}$$
$$w(3) = \frac{m'+2m''+m'''+\ldots}{p}$$
$$w(4) = \frac{m'+m''+2m'''+\ldots}{p}$$
etc.

die sich auf sehr einfache Weise beweisen lassen. Wenn man daher, statt die arithmetischen Mittel aus den Beobachtungen zu nehmen, und diese den $y(r)$ gleich zu setzen, die vollständigen Vorbereitungen, die im Vorhergehenden erklärt sind, in Bezug auf den gegenwärtigen Fall ausführt; demzufolge die vorläufigen Werthe (1), (2), (3), etc. der Richtungen annimmt, für alle n Richtungen die m, m', m'', etc. die Unterschiede zwischen den Summen der Beobachtungen und den entsprechenden Vielfachen der (1), (2), (3), etc. bedeuten lässt, und diese so vorbereitet, dass

$$m + m' + m'' + m''' + \ldots = 0$$

wird, so werden die Ausdrücke der Unbekannten,

$$w(2) = \frac{m'-m}{p}$$
$$w(3) = \frac{m''-m}{p}$$
$$w(4) = \frac{m'''-m}{p}$$
etc.

Hiemit lässt sich leicht in Betreff des gegenwärtig in Rede stehenden Verfahrens der Beweis führen, dass diese Arbeiten überflüssig sind, und dass man eben so wie im ersten Verfahren sogleich die arithmetischen Mittel aus den Beobachtungen für die Werthe der $y(r)$ annehmen kann, wie oben verlangt wurde; die Berücksichtigung der oben genannten Coefficienten kann beim gegenwärtigen Verfahren aber nicht vermieden werden.

nen Richtungen entsprechend, entweder abzukürzen, oder weiter auszudehnen sind.

Es sind zuerst zu berechnen

$$\begin{array}{l}
(2,2,1) = Q' - (p'p') \\
(2,3,1) = \quad - (p'p'') \\
(2,4,1) = \quad - (p'p''') \\
\text{etc.} \\
(2,l,1) = (lx') \\
\hline
(3,3,1) = Q'' - (p''p'') \\
(3,4,1) = \quad - (p''p''') \\
\text{etc.} \\
(3,l,1) = (lx'') \\
\hline
(4,4,1) = Q''' - (p'''p''') \\
\text{etc.} \\
(4,l,1) = (lx''') \\
\hline
\text{etc.} \\
\hline
\end{array}$$

(ll) wie oben Art. 137 ohne Ausnahme.

In der Berechnung von (ll) sind nemlich die pl, die zur ersten Richtung gehören mit aufzunehmen, dieses und, in den Vorbereitungen, die Mitverwendung derselben zum arithmetischen Mittel aus der Summe der Beobachtungen einer jeden Gruppe von Gyris sind aber bei dem gegenwärtig in Rede stehenden Verfahren die einzigen Fälle, in welchen Grössen die dieser Richtung angehören, in die Rechnungen eintreten. Aus den obigen Coefficienten entstehen nun die folgenden Gleichungen

$$\begin{array}{l}
(2,2,1)w(2) + (2,3,1)w(3) + (2,4,1)w(4) + \ldots\ldots = (2,l,1) \\
(2,3,1)w(2) + (3,3,1)w(3) + (3,4,1)w(4) + \ldots\ldots = (3,l,1) \\
(2,4,1)w(2) + (3,4,1)w(3) + (4,4,1)w(4) + \ldots\ldots = (4,l,1) \\
\qquad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{array}$$

von welchen die unter α) erhaltenen einen speciellen Fall bilden. Die Auflösung dieser Gleichungen ist durch die folgenden Ausdrücke auszuführen,

$$\beta'' = -\frac{(2,3,1)}{(2,2,1)}, \quad \gamma'' = -\frac{(2,4,1)}{(2,2,1)}, \quad \delta'' = -\frac{(2,5,1)}{(2,2,1)}, \text{ etc. } \chi'' = -\frac{(2,l,1)}{(2,2,1)}.$$

$$\begin{array}{l}
(3,3,2) = (3,3,1) + (2,3,1)\beta'' \\
(3,4,2) = (3,4,1) + (2,4,1)\beta'' \\
(3,5,2) = (3,5,1) + (2,5,1)\beta'' \\
\text{etc.} \\
(3,l,2) = (3,l,1) + (2,l,1)\beta'' \\
\hline
\end{array}$$

$$(4,4,2) = (4,4,1) + (2,4,1)\gamma''$$
$$(4,5,2) = (4,5,1) + (2,5,1)\gamma''$$
etc.
$$(4,l,2) = (4,l,1) + (2,l,1)\gamma''$$

$$(5,5,2) = (5,5,1) + (2,5,1)\delta''$$
etc.
$$(5,l,2) = (5,l,1) + (2,l,1)\delta''$$

etc. bis
$$(ll,2) = (ll) + (2,l,1)\chi''$$

$$\gamma''' = -\frac{(3,4,2)}{(3,3,2)}, \quad \delta''' = -\frac{(3,5,2)}{(3,3,2)}, \text{ etc. } \chi''' = -\frac{(3,l,2)}{(3,3,2)}$$
$$(4,4,3) = (4,4,2) + (3,4,2)\gamma'''$$
$$(4,5,3) = (4,5,2) + (3,5,2)\gamma'''$$
etc.
$$(4,l,3) = (4,l,2) + (3,l,2)\gamma'''$$

$$(5,5,3) = (5,5,2) + (3,5,2)\delta'''$$
etc.
$$(5,l,3) = (5,l,2) + (3,l,2)\delta'''$$

etc. bis
$$(ll,3) = (ll,2) + (3,l,2)\chi'''$$

$$\delta^{IV} = -\frac{(4,5,3)}{(4,4,3)}, \text{ etc. } \chi^{IV} = -\frac{(4,l,3)}{(4,4,3)}$$
$$(5,5,4) = (5,5,3) + (4,5,3)\delta^{IV}$$
etc.
$$(5,l,4) = (5,l,3) + (4,l,3)\delta^{IV}$$

etc. bis
$$(ll,4) = (ll,3) + (4,l,3)\chi^{IV}$$

$$\ldots\ldots \chi^{V} = -\frac{(5,l,4)}{(5,5,4)}$$
etc. bis
$$(ll,5) = (ll,4) + (5,l,4)\chi^{V}$$

etc. bis (ll,n)

Ferner sind zu berechnen

$\beta''' = \gamma'' + \gamma'''\beta''$	$\beta^{IV} = \delta'' + \delta'''\beta'' + \delta^{IV}\beta'''$	$\beta^{V} = \varepsilon'' + \varepsilon'''\beta'' + \varepsilon^{IV}\beta''' + \varepsilon^{V}\beta^{IV}$
	$\gamma^{IV} = \delta''' + \delta^{IV}\gamma'''$	$\gamma^{V} = \varepsilon''' + \varepsilon^{IV}\gamma''' + \varepsilon^{V}\gamma^{IV}$
		$\delta^{V} = \varepsilon^{IV} + \varepsilon^{V}\delta^{IV}$

etc.

worauf man

$$\begin{aligned} -w(2) &= \chi'' + \chi'''\beta'' + \chi^{IV}\beta''' + \chi^{V}\beta^{IV} + \dots \\ -w(3) &= \chi''' + \chi^{IV}\gamma''' + \chi^{V}\gamma^{IV} + \dots \\ -w(4) &= \chi^{IV} + \chi^{V}\delta^{IV} + \dots \\ -w(5) &= \chi^{V} + \dots \\ \text{etc.} & \qquad\qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

erhält. Wenn auf der Station drei Richtungen eingeschnitten worden sind, so kommt im zweiten Theile der Auflösung ausser den $y(r)$ und den Divisoren

$$(2,2,1),\ (3,3,2)$$

ohne Ausnahme noch die Grösse

$$\beta''$$

in Betracht. Wenn vier Richtungen eingeschnitten worden sind, so kommen ausser den $y(r)$ und den Divisoren

$$(2,2,1),\ (3,3,2),\ (4,4,3)$$

noch die Grössen

$$\beta'',\ \beta''',\ \gamma'''$$

in Betracht. Wenn fünf Richtungen eingeschnitten worden sind, so kommen ausser den $y(r)$ und den Divisoren

$$(2,2,1),\ (3,3,2),\ (4,4,3),\ (5,5,4)$$

noch die Grössen

$$\beta'',\ \beta''',\ \gamma''',\ \beta^{IV},\ \gamma^{IV},\ \delta^{IV}$$

in Betracht, u. s. w. Man erhält schliesslich, mit Ausnahme der $y(1)_s$

$$y(r)_s = (r)_s + w(r)_s$$

Die Summe W_0 sowohl wie die $u(m)_s$ werden eben so berechnet, wie bei dem ersten Verfahren, wobei nur zu bemerken ist, dass hier immer die $w(1)_s = 0$ sind.

146.

2) Zweiter Theil der Auflösung.

Die Bedingungsgleichungen werden wieder eben so vorbereitet wie bei dem ersten Verfahren, nur werden in denselben alle

$$\delta(1)_s = 0$$

gesetzt, wodurch die damit multiplicirten Glieder wegfallen. Es brauchen nun hier die beiden Fälle unter α) und β) nicht von einander unterschieden zu werden, da die Rechnungen in jedem derselben keinen Unterschied darbieten. Alle Ausdrücke müssen allgemein aufgestellt werden, da jetzt von keinem Gliede derselben im Voraus behauptet werden kann, dass es Null wird. Es sind zuerst für jede Station, für welche alle q nicht Null sind, die folgenden Ausdrücke zu berechnen,

$$\begin{array}{l} \eta(2,I)_s = q(2,I)_s \\ \eta(3,I)_s = \beta_s''.q(2,I)_s + q(3,I)_s \\ \eta(4,I)_s = \beta_s'''.q(2,I)_s + \gamma_s'''.q(3,I)_s + q(4,I)_s \\ \eta(5,I)_s = \beta_s^{IV}.q(2,I)_s + \gamma_s^{IV}.q(3,I)_s + \delta_s^{IV}.q(4,I)_s + q(5,I)_s \\ \quad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \end{array}$$

hierauf

$$Q(2,I)_s = \frac{\eta(2,I)_s}{(2,2,1)_s}, \quad Q(3,I)_s = \frac{\eta(3,I)_s}{(3,3,2)_s}$$
$$Q(4,I)_s = \frac{\eta(4,I)_s}{(4,4,3)_s}, \text{ etc.}$$

und dann

$$\begin{array}{l} f(2,I)_s = Q(2,I)_s + \beta_s''.Q(3,I)_s + \beta_s'''.Q(4,I)_s + \beta_s^{IV}.Q(5,I)_s + \dots \\ f(3,I)_s = Q(3,I)_s + \gamma_s'''.Q(4,I)_s + \gamma_s^{IV}.Q(5,I)_s + \dots \\ f(4,I)_s = Q(4,I)_s + \delta_s^{IV}.Q(5,I)_s + \dots \\ f(5,I)_s = Q(5,I)_s + \dots \\ \quad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \end{array}$$

Alle diese Grössen müssen durch allmählige Verwandelung der I in II, III, etc. wieder wie im ersten Verfahren auf alle Bedingungsgleichungen ausgedehnt werden.

147.

Die Berechnung der Coefficienten der Endgleichungen, und die Auflösung dieser wird nun hier genau eben so ausgeführt wie im ersten Verfahren, weshalb ich in dieser Beziehung auf den Art. 140 u. f. verweise. Schliesslich wird wieder allgemein mit Ausnahme von $z(1)_s$

$$z(r)_s = f(r,I)_s.(I) + f(r,II)_s.(II) + f(r,III)_s.(III) + \dots$$

und mit Ausnahme von $x(1)_s$

$$x(r)_s = y(r)_s - z(r)_s$$

womit die Auflösung der Aufgabe beendigt ist. Auch die Berechnung der wahrscheinlichsten Werthe der $u(m)_s$ wird, wenn man diese kennen zu lernen wünscht, nach dem im Art. 142 angeführten Ausdruck ausgeführt.

148.

3) Berechnung der Gewichte.

Da im Allgemeinen hier die Berechnung der Gewichte eben so ausgeführt wird wie bei dem ersten Verfahren, und nur die Aenderung eintritt, dass alle, etwa vorkommenden, sich auf die Richtungen $x(1)_s$ beziehenden Grössen wegzulassen sind, so brauchen die Ausdrücke, die im Art. 143 vollständig angegeben sind, nicht wiederholt zu werden. Aber eine Gattung von Fällen ist vorhanden, in welcher die Berechnung der Gewichte anders geführt werden kann, und daher die sich darauf beziehenden Ausdrücke hier aufzunehmen sind. Es sind diese die Fälle, in welchen das Gewicht irgend eines der Winkel $x(r)_s - x(1)_s$ verlangt wird, die anders behandelt werden können, weil im gegenwärtigen Verfahren diese Winkel die eigentlichen Unbekannten der Aufgabe sind. Die im Vorhergehenden entwickelten Ausdrücke für die Berechnung der Gewichte der Unbekannten selbst sind, durch die hier eingeführte Bezeichnung ausgedrückt, die folgenden.

Es fällt nun nicht nur die Aufstellung der Function Ω, sondern es fallen auch alle Grössen weg, in deren Bezeichnung der Buchstabe M vorkommt. Zuerst ist die Grösse $\pi(r)_s$ zu berechnen, die für verschiedene Werthe von r verschiedenartige Ausdrücke bekommt.

Für $r = 2$ ist

$$\pi(2)_s = \frac{1}{(2,2,1)_s} + \frac{\beta_s''^2}{(3,3,2)_s} + \frac{\beta_s'''^2}{(4,4,3)_s} + \frac{\beta_s^{IV2}}{(5,5,4)_s} + \cdots$$

für $r = 3$ ist

$$\pi(3)_s = \frac{1}{(3,3,2)_s} + \frac{\gamma_s'''^2}{(4,4,3)_s} + \frac{\gamma_s^{IV2}}{(5,5,4)_s} + \cdots$$

für $r = 4$ ist

$$\pi(4)_s = \frac{1}{(4,4,3)_s} + \frac{\delta_s^{IV2}}{(5,5,4)_s} + \cdots$$

für $r = 5$ ist

$$\pi(5)_s = \frac{1}{(5,5,4)_s} + \cdots$$

u. s. w. wenn auf der Station mehr Richtungen eingeschnitten worden sind. Ferner sind für jeden Werth von r, mit der Ausnahme $r = 1$, zu berechnen,

$$
\begin{aligned}
f(r,II,1)_s &= f(r,II)_s + f(r,I)_s \,.\, (2)_1 \\
f(r,III,1)_s &= f(r,III)_s + f(r,I)_s \,.\, (3)_1 \\
f(r,IV,1)_s &= f(r,IV)_s + f(r,I)_s \,.\, (4)_1 \\
&\text{etc.} \\
\hline
f(r,III,2)_s &= f(r,III,1)_s + f(r,II,1)_s \,.\, (3)_2 \\
f(r,IV,2)_s &= f(r,IV,1)_s + f(r,II,1)_s \,.\, (4)_2 \\
&\text{etc.} \\
\hline
f(r,IV,3)_s &= f(r,IV,2)_s + f(r,III,2)_s \,.\, (4)_3 \\
&\text{etc.}
\end{aligned}
$$

die auch auf dieselbe Weise aufgestellt werden können, wie die analogen Grössen des Art. 143, nemlich

$$
\begin{aligned}
f(r,II,1)_s &= f(r,II)_s + f(r,I)_s.(2)_1 \\
f(r,III,2)_s &= f(r,III)_s + f(r,I)_s.(3)_1 + f(r,II,1)_s.(3)_2 \\
f(r,IV,3)_s &= f(r,IV)_s + f(r,I)_s.(4)_1 + f(r,II,1)_s.(4)_2 + f(r,III,2)_s.(4)_3 \\
&\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}
$$

und jedenfalls fortgesetzt werden müssen bis alle Bedingungsgleichungen erschöpft sind. Es wird hierauf

$$\mu(r)_s = \frac{f(r,I)_s^2}{(I,I)} + \frac{f(r,II,1)_s^2}{(II,II,1)} + \frac{f(r,III,2)_s^2}{(III,III,2)} + \frac{f(r,IV,3)_s^2}{(IV,IV,3)} + \ldots$$

und

$$P = \frac{1}{\pi(r)_s - \mu(r)_s}$$

wenn wieder P das gesuchte Gewicht bezeichnet.

§. 7. Berechnung der mittleren Fehler der durch das vorhergehende Verfahren erhaltenen Resultate.

149.

Es sind mehrere Ausdrücke zur Berechnung des sogenannten wahrscheinlichen Fehlers einer Bestimmung vorhanden, aber von diesen nur der folgende in allgemeinem Gebrauch,

$$\text{wahrscheinl. Fehler} = 0.67445 \sqrt{\frac{W}{m}}$$

wo W die Summe der mit ihren Gewichten multiplicirten Quadrate der übrig gebliebenen Fehler, und m die Anzahl der Bestimmungen oder Beobachtungen bedeuten. Ausserdem hat Gauss noch den Begriff des mittleren zu befürchtenden Fehlers, den man häufig auch schlechtweg

den mittleren Fehler nennt, aufgestellt, und durch den folgenden Ausdruck definirt,

$$\text{mittl. z. bef. Fehler} = \sqrt{\frac{W}{m-n}}$$

wo W und m dieselbe Bedeutung haben wie vorher, und n die Anzahl der von einander unabhängigen Unbekannten bezeichnet.

Ohne mich in eine Discussion der inneren Gründe einzulassen, auf welchen diese beiden Ausdrücke beruhen, will ich blos die numerischen Werthe, die daraus in verschiedenen Fällen hervorgehen, mit einander vergleichen.

Je grösser m bei unverändert angenommenem Werthe von n wird, desto mehr nähern sich die Werthe der beiden Ausdrücke einander, die beide, wenn $m = \infty$ wird, den Werth Null geben. Bei sehr grossem m in Bezug auf n können daher schon die Resultate beider Ausdrücke für einander gleich erachtet werden. Während dieses an der oberen Grenze stattfindet, bildet sich an der unteren Grenze ein ganz davon verschiedenes Verhalten. Betrachten wir, um dieses zu zeigen, den extremen Fall $m = n$, nemlich den Fall, in welchem die Anzahl der vorhandenen Beobachtungen oder Bestimmungen der Anzahl der von einander unabhängigen Unbekannten gleich wird. Die Methode der kleinsten Quadrate schliesst diesen Fall nicht aus, denn die Gleichungen und sonstigen Ausdrücke, auf welche sie führt, finden in demselben, wie man oben gesehen hat, ohne Abänderung volle Anwendung. Es müssen daher auch die beiden hier aufgestellten Ausdrücke des wahrscheinlichen und des mittleren Fehlers ihre volle Geltung behalten.

Da aber jetzt allen vorhandenen Beobachtungen vollkommen Gnüge geleistet wird, so bekommt man $W = 0$, und folglich wird nach dem ersten Ausdruck auch der wahrscheinliche Fehler dieser Bestimmung $= 0$, welches gewiss unrichtig ist. Im Ausdruck des mittleren Fehlers hingegen wird nicht nur $W = 0$, sondern auch $m = n$, und der Ausdruck giebt daher in diesem Falle den mittleren Fehler $= \frac{0}{0}$, das ist unbestimmt. Dieses ist das richtige Resultat, denn in dem Falle, der jetzt betrachtet wird, kann man weder den wahrscheinlichen noch den mittleren Fehler bestimmen, sie bleiben daher beide unbestimmt.

Aus diesem Grunde muss in den Fällen, in welchen m nicht viel grösser ist wie n, der Ausdruck des mittleren Fehlers eine genauere Bestimmung gewähren, wie der des wahrscheinlichsten Fehlers, und da,

wie wir gesehen haben, beide Ausdrücke bei wachsendem m zu gleichen Werthen hinstreben, so ist in allen Fällen die Berechnung des mittleren Fehlers der des wahrscheinlichen vorzuziehen.

150.

Aus den vorstehenden Gründen soll in der Anwendung auf unsere Hauptaufgabe nur die Bestimmung des mittleren Fehlers durch den Ausdruck

$$m.f. = \sqrt{\frac{W}{m-n}}$$

betrachtet werden. Die Berechnung der Grösse W ist schon oben gezeigt worden, und daher hier nur die Berechnung von m und n zu erklären. Da die Resultate der Einstellungen der Richtungen auf den verschiedenen Stationen mit l nebst angehängten Strichen bezeichnet worden sind, so ist klar dass

$m =$ der Anzahl aller vorhandenen l ist.

Die Unbekannten unserer Aufgabe sind einestheils die Richtungen x, und anderntheils die u, die der Anzahl der überhaupt vorhandenen Gruppen von Gyris gleich sind. Da aber auf jeder Station nur die Unterschiede der Richtungen von Einer derselben fest bestimmbar sind, so ist von der Summe der x und der u die Anzahl der Stationen abzuziehen, und da die hieraus hervorgehende Anzahl von Unbekannten durch die Bedingungsgleichungen von einander in Abhängigkeit stehen, so ist noch die Anzahl der Bedingungsgleichungen davon abzuziehen. Die so erhaltene Zahl ist n. Bezeichnet man nun durch ein der Bezeichnung der betr. Grösse vorgesetztes A die Anzahl aller Grössen dieser Gattung, so dass

(Al) die Anzahl aller l,
(Ax) die Anzahl aller x,
(Au) die Anzahl aller u, folglich die Anzahl aller Gruppen von Gyris,
(As) die Anzahl aller Stationen,
(Ab) die Anzahl aller Bedingungsgleichungen

bedeuten, so wird, wenn zur Abkürzung

$$D = (Al) + (As) + (Ab) - (Ax) - (Au)$$

gesetzt wird, der

$$m.f. = \sqrt{\frac{W}{D}}$$

*) und da dieser Ausdruck den mittleren Fehler einer Beobachtung der Gattung giebt, deren Gewicht = 1 gesetzt worden ist, so giebt er in seiner Anwendung auf das eben ausgeführte Hauptbeispiel den *m. f.* einer einzelnen Beobachtung einer Richtung, indem das Gewicht einer solchen Beobachtung = 1 angenommen worden ist.

151.

Wenden wir nun den eben abgeleiteten Ausdruck auf dieses Beispiel an, so erhalten wir aus dem Art. 95

$$W = 212.636$$

Die Anzahl der l ist auf den Stationen		und die Anzahl der Gruppen von Gyris
(1)	57	21
(2)	21	8
(3)	9	4
(4)	9	4
(5)	6	3
	$(Al) = 102$	$(Au) = 40$

und ferner sind

$$(Ax) = 19\,, \quad (As) = 5\,, \quad (Ab) = 6$$

folglich $D = 54$, und hieraus bekommt man den

m. f. einer einzelnen Beobachtung
einer Richtung $= 1''984$

---

*) Man kann bemerken, dass dieser Ausdruck in den von Gauss in seinem Supplementum theoriae comb. etc. für den dort behandelten speciellen Fall gegebenen übergeht, wenn man die erforderlichen Bedingungen einführt. Der Gaussische Ausdruck, in die hier eingeführte Bezeichnung übersetzt, ist

$$m.\,f. = \sqrt{\frac{W}{(Ab)}}$$

und die Bedingungen des von Gauss behandelten Falles sind

$$(Au) = (As)\,, \quad (Ax) = (Al)$$

Führt man diese in die Ausdrücke des Textes ein, so wird

$$D = (Ab)$$

und der vorstehende Ausdruck geht daraus hervor.

Will man auch die mittleren Fehler der Resultate, für welche oben die Gewichte berechnet worden sind, kennen lernen, so dient dazu der Ausdruck

$$m.\,f. = \frac{F}{\sqrt{P}}$$

wenn F den mittleren Fehler der Beobachtungen, denen das Gewicht $= 1$ beigelegt worden ist, — hier den oben gefundenen *m. f.* —, und P das Gewicht des betr. Resultats aus den Beobachtungen bezeichnen. In den Artt. 97 bis 103 ergaben sich für

den Winkel	(3)(1)(5)	das Gewicht	=	13.46
» »	$(b)(1)(a)$	» »	=	21.29
» »	(5)(2)(3)	» »	=	34.8
» »	(5)(3)(2)	» »	=	15.58
das Aggregat	$u(1)_3+x(1)_3$	» »	=	67.37
» »	$u(8)_2+x(4)_2$	» »	=	50.00
die Seite	(1)(3)	» »	=	341.2

und der vorstehende Ausdruck giebt daher der Reihe nach die

$$\begin{aligned} m.\,f. &= 0''541 \\ &= 0.430 \\ &= 0.336 \\ &= 0.503 \\ &= 0.242 \\ &= 0.281 \\ &= 0^m107\,^{*)} \end{aligned}$$

*) Gauss hat in seiner eben angezogenen Abhandlung in Bezug auf seine Triangulation berechnet und gefunden, den

m. f. der Seite

Falkenberg-Breitborn $= 0^m1209$

und ich habe später für dieselbe Triangulation nach den obigen Formeln berechnet und gefunden, den

m. f. des Winkels

Wilsede, Falkenberg, Wulfsode $= 0''385$

und den

m. f. des Winkels

Hauselberg, Wulfsode, Falkenberg $= 0''353$.

152.

Ausserdem ist im Art. 130 noch das Gewicht der Seite (1)(2) unter zwei Annahmen berechnet worden. In der Annahme der einzig gemessenen Grundlinie (1)(3) wurde dasselbe = 738.0, und in der Annahme, dass die zwei Grundlinien (1)(3) und (2)(4) gemessen worden seien = 4105 gefunden. Wendet man den obigen Ausdruck hierauf an, so findet man für die Seite (1)(2) im ersten Falle den

$$m. f. = 0^m0730$$

und in dem zweiten Falle den

$$m. f. = 0^m0130$$

Das Hinzukommen einer zweiten Grundlinie hat also die Genauigkeit dieser Seite um mehr wie das Doppelte vergrössert.

Ich bemerke hiezu, dass strenge genommen für den Fall der zwei Grundlinien der *m. f.* einer Richtung von Neuem hätte berechnet werden müssen, da wegen des Hinzukommens von noch einer Bedingungsgleichung der Nenner *D* des bez. Ausdrucks sich um eine Einheit vergrössert. Da dieses jedoch hier nur einen unbedeutenden Einfluss auf das obige Resultat hätte äussern können, so habe ich keine Rücksicht darauf genommen, und der oben angegebene zweite *m. f.* der Seite (1)(2) ist ein Weniges grösser, wie er strenge genommen sein würde.

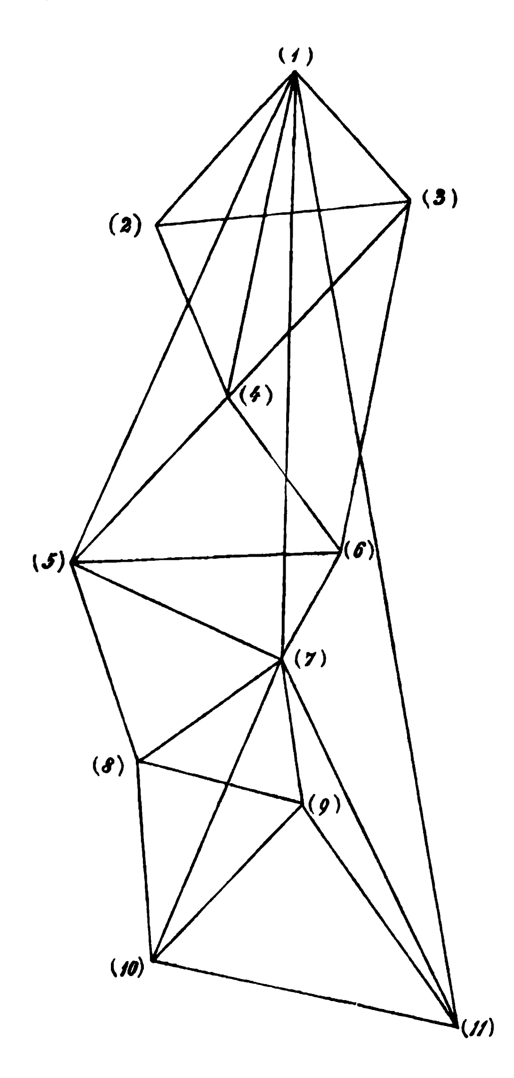
§. 8. **Nachtrag zu der »Geodätische Untersuchungen« betitelten Abhandlung.**

153.

Ich bin darauf aufmerksam gemacht worden, dass in der in der Ueberschrift angezogenen Abhandlung kein Verfahren angegeben ist, durch welches man mit erforderlicher Sicherheit in einem schon ausgeglichenen Dreiecksnetze lange geodätische Linien bestimmen könne. Es ist richtig, dass dort kein Verfahren für diesen Zweck beschrieben ist, aber die dort gelösten Hauptaufgaben bilden die Grundlagen, nicht nur dazu, sondern auch zu vielen andern Aufgaben, und es würde zu weit geführt haben, wenn ich diese alle hätte mit aufnehmen wollen.

Ich will indess hier die Auflösung der oben genannten Aufgabe geben, obgleich sie so nahe liegt, dass Jeder sie sich hätte entwickeln können.

Die folgende Figur soll irgend ein Dreiecksnetz darstellen, in welchem die Winkel schon ausgeglichen sind, und in dem die Endpunkte mit den Zahlen (1) bis (11) bezeichnet sind.



In diesem Dreiecksnetze habe ich mich begnügt, blos die Hauptdreiecke aufzunehmen, und dagegen die Richtungen oder Diagonalen, die man mit eingeschnitten hat, um die zur Ausgleichung der Winkel erforderlichen Bedingungsgleichungen zu erhalten, weggelassen. Diese letzteren sind für den jetzt zu verfolgenden Zweck im Allgemeinen

überflüssig, und sollten sie in der Anwendung in einzelnen Fällen nützlich werden können, so kann man sie ohne Weiteres auch aufzeichnen und anwenden.

154.

Ich nehme nun an, dass an den Punkten (1) und (7) dieses Dreiecksnetzes die Polhöhen und das Azimuth einer der dort zusammenlaufenden Dreiecksseiten astronomisch bestimmt sei, und man die Polhöhe von (1), so wie das Azimuth der geodätischen Linie (1)(7) am Punkte (1) auf den Punkt (7) geodätisch übertragen wolle, um diese Grössen mit dem am Punkte (7) astronomisch bestimmten zu vergleichen.

Zu dem Ende ziehe man die geodätische Linie (1)(4), und betrachte das sphäroidische Dreieck (1)(2)(4), in welchem die Seiten (1)(2) und (2)(4) nebst dem eingeschlossenen Winkel bekannt sind. Man berechne dieses Dreieck erst beiläufig, indem man es als sphärisch oder gar als eben betrachtet, wozu die Anwendung von höchstens fünfstelligen Logarithmen mehr wie ausreichend ist. Man erhält hiemit hinreichend genaue Data um nach den Ausdrücken des Art. 128 der angezogenen Abhandlung die Unterschiede zwischen den sphäroidischen und den sphärischen Winkeln mit erforderlicher Genauigkeit berechnen zu können. Durch den bez. Unterschied verwandele man den sphäroidischen Winkel (1)(2)(4) in den bez. sphärischen, und berechne hierauf durch die sphärische Trigonometrie die Seite (1)(4) und die beiden anliegenden Winkel mit hinreichender Schärfe. Die gefundene Seite bedarf keiner Verbesserung, aber die beiden mit berechneten Winkel werden durch die oben genannten vorher berechneten Unterschiede auf ihre Werthe auf den Sphäroid hingeführt.

In dem Dreiecke (1)(5)(4) sind nun wieder zwei Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel bekannt, und nachdem dieses auf die nemliche Art behandelt worden ist, werden im Dreiecke (1)(5)(7) zwei Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel bekannt, aus welchen auf die nemliche Art die verlangte geodätische Linie (1)(7) nebst den beiden anliegenden sphäroidischen Winkeln erhalten werden.

Aus der Polhöhe des Punkts (1) und dem Azimuth der Linie (1)(7) an diesem Punkte, welches man auch durch die vorbeschriebene Rechnung aus dem daselbst astronomisch bestimmten Azimuth einer Dreiecks-

seite erhält, nebst der gefundenen Länge der geodätischen Linie kann man nun durch die erste Hauptaufgabe der angezogenen Abhandlung (cf. Art. 10 u. f.) für den Endpunkt (7) die Polhöhe, den Längenunterschied mit (1), und das Azimuth von (1)(7) berechnen, und mit den astronomischen Bestimmungen dieser Grössen vergleichen.

Man kann dieses auch auf andere Weise ausführen. Durch die zweite Hauptaufgabe der angezogenen Abhandlung (cf. Art. 51 u. f.) kann man aus den Polhöhen der Punkte (1) und (7) und dem Längenunterschiede derselben die Länge der geodätischen Linie (1)(7) und die Azimuthe an ihren Endpunkten berechnen, und diese mit den anderweitig gefundenen Werthen derselben vergleichen.

Endlich kann man auch den Inhalt des vierten Abschnittes der angezogenen Abhandlung anwenden, und (cf. Art. 154 u. f.) aus der wie beschrieben gefundenen Länge der geodätischen Linie (1)(7) und den astronomisch bestimmten Polhöhen dieser Endpunkte den Längenunterschied derselben so wie die Azimuthe von (1)(7) berechnen, und diese mit den anderweitig erhaltenen Werthen dieser drei Grössen vergleichen.

Die a. a. O. entwickelten Auflösungen dieser drei Aufgaben sind unbeschränkt anwendbar, wie lang auch die Linie (1)(7) sei, und welche Lage sie auch auf dem Erdsphäroid habe.

155.

Zum Inhalt des vor. Art. sind einige Bemerkungen aufzustellen.

In der Anwendung wird man in der Regel nicht mit einer so geringen Anzahl von Dreiecken zur Berechnung der aufgegebenen geodätischen Linie ausreichen wie in diesem fingirten Dreiecksnetze der Fall ist, sondern eine grössere Anzahl derselben berechnen müssen.

Die Anzahl der zu berechnenden Dreiecke wird man oftmals dadurch kleiner machen können, dass man die Diagonalen der Vier- oder Mehrecke mit benutzt, die zur Ausgleichung des Dreiecksnetzes mit eingeschnitten worden sind; auch kann man zum vorliegenden Zweck Diagonalen berechnen und benutzen, die bei den Messungen nicht mit eingeschnitten worden sind.

Man kann in jedem Dreiecksnetze die hier in Rede stehenden Rechnungen auf verschiedene Arten, nemlich durch Benutzung anderer Dreieckspunkte, wie die oben angegebenen, ausführen.

In den ersten zu berechnenden Dreiecken, die von allen immer die kleinsten sind, kann man einen Schritt weiter gehen, wie im vor. Art. beschrieben ist. Man kann die Winkel derselben, nachdem sie vom sphäroidischen auf sphärische hingeführt worden sind, hierauf auf ebene hinführen, und das bez. Dreieck alsdann als ein ebenes berechnen, worauf die Winkel des Resultats wieder erst auf sphärische, und darauf auf sphäroidische hinzuführen sind.

In den ersten kleineren Dreiecken wird gemeiniglich die Reduction der sphäroidischen Winkel auf sphärische so klein, dass man sie übergehen kann, aber so wie die Seiten, und damit auch die Dreiecke selbst grösser werden, können diese Reductionen sehr merklich werden.

Das Verfahren des vor. Art. ist nicht unbegrenzt anwendbar, denn die Ausdrücke des Art. 128 der angezogenen Abhandlung hören auf ausreichend genau zu sein, wenn die Dreiecksseiten eine gewisse Grösse übersteigen, die ohngefähr auf 20° festgesetzt werden kann.

156.

Um zu zeigen, wie man verfahren kann, wenn die zu berechnende geodätische Linie die eben genannte Grösse erreicht oder übersteigt, kehren wir zu dem im Art. 153 verzeichneten Dreiecksnetze zurück und nehmen an, dass die geodätische Linie (1)(11) nebst den anliegenden Winkeln zu berechnen sei, und dass diese die angeführte Grenze übersteige. Man kann nun in einem Zwischenpunkte, für welchen die betreffenden Linien die angeführte Grenze nicht erreicht haben, z. B. in (7), abbrechen, und diesen zum Ausgangspunkt neuer geodätischer Linien annehmen. Aus dem Dreiecke (5)(8)(10) kann man die Linie (8)(10) nebst den anliegenden Winkeln berechnen, und erhält hierauf durch das Dreieck (7)(10)(11) die Linie (7)(11) nebst den anliegenden Winkeln.

Da nun, um (1)(11) zu erhalten, das sphäroidische Dreieck (1)(7)(11) zu berechnen ist, und man durch die vorhergehend angeführten Regeln die Polhöhe von (7) und die Azimuthe der Linien (1)(7) und (7)(11) an diesem Punkt berechnen kann, so lässt sich durch Anwendung der Aufgabe des Art. 74 u. f. der angezogenen Abhandlung das Dreieck (1)(7)(11) vollständig berechnen, wie gross es auch sei, da die Auflösung, die ich von der zuletzt genannten Aufgabe gegeben habe, keiner Beschränkung unterworfen ist.

Wäre die Linie (1)(11) noch länger, so kann man, statt Eines, mehrere Zwischenpunkte annehmen, und die somit entstehenden grossen sphäroidischen Dreiecke immer durch die zuletzt angeführte Aufgabe mit jeder wünschenswerthen Genauigkeit berechnen. Man sieht hieraus, dass die in diesem § gestellte Aufgabe in dem Inhalt der oft angezogenen Abhandlung in möglichst grosser Ausdehnung und mit jeder wünschenswerthen Genauigkeit ihre Auflösung findet.

Druckfehler.

Pag. 801 Z. 10 v. o. lies 0^m0310 statt 0^m0130

